FLORENTIN SMARANDACHE

PROBLEMES avec et sans... PROBLEMES!

Traduits du Roumain par l'auteur
et
Sophie Mugnier
Professeurs de Mathématiques

SOCIETE MAROCAINE
D'IMPRESSION ET D'EQUIPEMENT S.A.R.L
SOMIPRESS

Siège Sociale : 72, Boulevard Hassan II
Tél. : 238-68 - FES (v. n.)

FLORENTIN SMARANDACHE

PROBLEMES avec et sans... PROBLEMES!

Traduits du Roumain par l'auteur
et
Sophie Mugnier
Professeurs de Mathématiques

SOCIETE MAROCAINE
D'IMPRESSION ET D'EQUIPEMENT S.A.R.L
SOMIPRESS

Siège Sociale : 72, Boulevard Hassan II
Tél. : 238-68 - FES (v. n.)

FLORENTIN SMARANDACHE

—oOo—

PROBLEMES AVEC ET SANS . . . PROBLEMES !

Traduits du roumain par l'auteur
et
Sophie Mugnier,
Professeurs de Mathématiques

<u>Couverture</u> : Ichaab SERGHINI

L'auteur autorise la reproduction de ses problèmes à la seule condition de citer son nom et les références du présent ouvrage .

AVANT - PROPOS

—oOo—

Ce livre s'adresse aux élèves du lycée, aux étudiants et aux professeurs. Il contient 140 problèmes originaux publiés par l'auteur dans les revues scientifiques. Les problèmes sont utiles pour préparer les concours, les examens, les olympiades mathématiques. Beaucoup d'eux ont un caractère généralisé. Pour chaque problème on donne une solution détaillée.

L'AUTEUR

TABLE DES MATIERES

---oOo---

—o— PROBLEMES DISTRAYANTS —o—

——oooOoo——

—o==o—

1.1. Quatre équipes de footfall : A, B, C et D ont participé à un tournoi. Le classement final n'a pas été entièrement gardé, les chiffres essuyés étant indiqués par des étoiles (classement, équipe, nombre des matchs joués, des victoires, des matchs nuls, des défaites, buts marqués, buts encaissés, nombre des points gagnés) :

1.	A	3	* * *	5 - 2	6
2.	B	*	* * 2	3 - 3	*
3.	C	3	* * *	4 - *	*
4.	D	3	* * *	1 - 4	*

Les équipes ont été départagées par les critères connus du football, et le classement élaboré de même.

a) Compléter le classement.

b) Trouver le résultats de tous les matchs disputés.

SOLUTION :

a) L'équipe A a joué 3 matchs, donc A a joué aussi contre B. De même pour C et D. D'où, B a joué 3 matchs. A a 6 points en 3 matchs, donc A a gagné tous les matchs, c'est-à-dire A a 3 victoires, zéro match nul et zéro défaite. B a 2 défaites, mais B occupe la deuxième place. Il en résulte que le troisième match de B est une victoire, parque que :

si ce match est nul, alors C et D auront ensemble $6.2 - (6 + 1) = 5$ points et donc au moins l'une d'elles aura plus de points que B. Ainsi B a 2 points.
C et D ont ensemble $6.2 - (6 + 2) = 4$ points. D'où C et D ont tout les deux 2 points, puisqu'autrement il en résulterait qu'au moins l'une de C et D aurait plus que B.
Donc C a une victoire, zéro match nul et 2 défaites. De même pour D. (C et D ne peuvent pas obtenir les 2 points de deux matchs nuls, parce que A et B n'ont aucun match nul.) C a encaissé $(5 + 3 + 4 + 1) - (2 + 3 + 4) = 4$ buts. Le classement complet est :

1.	A	3	3 0 0	5 - 2	6
2.	B	3	1 0 2	3 - 3	2
3.	C	3	1 0 2	4 - 4	2
4.	D	3	1 0 2	1 - 4	2

On sait que dans un classement, la somme des buts marqués par toutes les équipes est égale à la somme des buts encaissés par toutes les équipes.

b) On détermine les pronostics des matchs.

A a 3 victoires, donc $A - B = 1$, $A - C = 1$, $A - D = 1$.

B et C ont le même nombre de points, la même différence entre les buts marqués et les buts encaissés, le même nombre de victoires, mais B occupe une place supérieure à C, il en résulte que B - C = 1, d'où B - D = 2, puis C - D = 1.
D a marqué un seul but et a une seule victoire, donc B - D = 0 - 1.
A a 3 victoires, 5 buts marqués et 2 buts encaissés; la différence est 5 - 2 = 3. Alors A a eu les résultats : 1 - 0, 1 - 0, 3 - 2 ou 1 - 0, 2 - 1, 2 - 1. Comme A - D = 1 et D a marqué son seul but contre B, il en résulte : A - D = 1 - 0, d'où l'on tire C - D = 3 - 0.

La situation est : :

I.	A	2	2 0 0	4 - 2	4
2.	B	2	1 0 1	3 - 2	2
3.	C	2	0 0 2	1 - 4	0

avec les pronostics antérieurs.

A peut avoir les résultats : 1 - 0, 3 - 2 ou 2 - 1, 2 - 1. On observe qu'on ne peut avoir ni le résultat A - B = 3 - 2, puisque B n'a enregistré que 2 buts, ni A - B = 3-2, puisque C ne peut plus marquer qu'un but. Donc, il reste l'alternative 2 - 1, 2 - 1, d'où A - B = 2 - 1, A - C = 2 - 1 et on obtient B - C = 2 - 0. Les résultats exacts sont :

A - B = 2 - 1, A - C = 2 - 1, A - D = 1 - 0, B - C = 2 - 0,
B - D = 0 - 1, C - D = 3 - 0.

1.2. A la fin d'un tournoi de fottball entre les équipes A , B , C, D le classement était le suivant :

1.	A	3	2 0 1	2 - 1	4
2.	B	3	2 0 1	2 - 1	4
3.	C	3	1 1 1	4 - 4	3
4.	D	3	0 1 2	3 - 5	1

Les critères qui ont départagé les équipes étant :

a) le nombre des points accumulé ;
b) la différence entre les buts marqués et les buts encaissés;
c) le nombre des victoires;
d) la victoire directe contre une équipe .

Trouver tous les résultats des matchs.

SOLUTION :

Tout d'abord on détermine les pronostics exacts des matchs joués.

Les équipes A et B ont le même nombre de points, la même différences entre les buts marqués et les buts encaissés, le même nombre de victoires, mais A occupe la première place pendant que B la deuxième. D'où A - B = 1 (c'est-à-dire, A a gagné le jeu). B a deux victoires et une défaite, donc B - C = 1 et B - D = 1. Les équipes C et D sont les seules qui ont chacune un jeu égal. Alors C - D = X (où X signifie le match égal). A a une défaite, alors A - C = 2. Les pronostics exacts sont :

A - B = 1 , A - C = 2 , A - D = 1 , B - C = 1 , B - D = 1 , C - D = X

Déterminons les résultats.

Puisque A a 2 victoires et seulement 2 buts marqués, donc ces victoires sont obtenues par 1 - 0, 1 - 0. On a donc A - B = 1 - 0 et A - D = 1 - 0, d'où A - C = 0 - 1. De manière analogue pour B on a B - C = 1 - 0 et B - D = 1 - 0, et on donne C - D = 3 - 3. Les résultats exacts sont :

A-B = 1-0 , A-C = 0-1 , A-D = 1-0 , B-C = 1-0 , B-D = 1-0 , C-D = 3-3.

1.3. A l'élaboration du classement de football suivant, quatre fautes ont été faites , l'ordre des équipes restant le même :

1.	A	3	2 1 0	1-0	5
2.	B	2	1 0 1	5-4	2
3.	C	3	1 0 2	6-6	2
4.	D	3	0 2 1	2-5	2

a) Quelles sont les fautes ?
b) En corrigeant ces fautes, trouver les résultats de tous les matchs joués.

SOLUTION :

a) Puisque A, C, D ont joué 3 matchs il en résulte que B aussi a joué 3 matchs (on ne peut pas avoir 2 matchs joués pour chaque équipe, parce qu'il y aurait plus de quatre fautes dans le classement). Le troisième match de B ne peut pas être une victoire, parce qu'il y aurait en tout $5 + 4 + 2 + 2 = 13 \neq 12$ points (on ne peut pas faire d'autres modifications sur les points de A, C ou D, puisqu'on obtiendrait plus de quatre fautes).
De manière analogue, le troisième match de B ne peut pas être une défaite. Donc B a un match nul (la troisième faute). A a 2 victoires et un seul but marqué. Le nombre des buts marqués $1 + 5 + 6 + 2 = 14 \neq$ $\neq 15 = 0 + 4 + 6 + 5$ qui est le nombre des buts encaissés pour toutes les équipes. D'où A a marqué 2 buts (la quatrième faute). (On ne peut pas faire des modifications sur les buts encaissés par A ou par les autres pour la même raison).

b) Le classement correct est :

1.	A	3	2 1 0	2 - 0	5
2.	B	3	1 1 1	5 - 4	3
3.	C	3	1 0 2	6 - 6	2
4.	D	3	0 2 1	2 - 5	2

1°) Il faut établir les pronostics exacts.
D a 2 matchs nuls et A et B ont chacun un match nul.
Alors A - D = X, B - D = X. L'équipe A a encore 2 victoires. Donc A - B = 1, A - C = 1. De B - D = X et A - B = 1 on tire B - C = 1, parce que B a une victoire. De même C - D = 1. Les pronostics exacts sont :
A-B = 1, A-C = 1, A-D = X, B - C = 1, B - D = X, C - D = 1.

2°) Maintenant, il suffit d'établir les résultats exacts.
A a 2 victoires et 2 buts marqués. Alors A - B = 1 - 0, A - C = 1 - 0.
Parce que A n'a encaissé aucun but, on a A - D = 0 - 0.
En retirant l'équipe A du classement (avec tous ses résultats), on obtient un sous-classement :

2.	B	2	1 1 0	5 - 3	3
3.	C	2	1 0 1	6 - 5	2
4.	D	2	0 1 1	2 - 5	1

avec les pronostics connus : B - C = 1, B - D = X, C - D = 1
B a une victoire et zéro défaite et la différence de buts 5 - 3 = 2.
D'où : B - C = 2 - 0 ou 3 - 1 ou 4 - 2 ou 5 - 3.
C a une victoire, et la différence de buts 6 - 5 = 1; mais puisque B a battu C de 2 buts, C gagne donc de trois buts contre D. D'où C - D = 3 - 0 ou 4 - 1.

Si on a C - D = 3 - 0, alors on a B - C = 5 - 3, et B - D = 0 - 0.
Mais ça signifie que D a zéro but marqué. Contradiction.
Donc C - D = 4 - 1. Et on a : B - C = 4 - 2, B - D = 1 - 1. Ces derniers résultats vérifient le classement.
Les résultats sont : A - B = 1 - 0, A - C = 1 - 0, A - D = 0 - 0, B - C = 4 - 2, B - D = 1 - 1, C - D = 4 - 1.

Le problème est déterminé de façon unique.
Le problème est complétement démontré.

1.4. Pour les préliminaires du championnat mondial de football on dispute, aller et retour, les matchs d'un groupe de 5 équipes où se qualifient les 2 premières.

Déterminer le nombre minimum de points pour lequel une équipe peut se qualifier, et aussi les résultats qui favorisent la qualification.

Généraliser dans le cas d'un groupe de n équipes, où se qualifient les m premières ($1 \leqslant m \leqslant n$).

SOLUTION:

Resolvons directement pour le cas général, l'autre cas résultant par particulisation.

Dans un groupe de n équipes se disputent :

$2\,[(n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1] = n\,(n-1)$ matchs. Le nombre total des points est $2n\,(n-1)$. Si $m = 1$, le nombre minimum de points sera $2\,n\,(n-1) : n = 2\,(n-1)$ points (toutes les équipes ont le même nombre de points, mais celle qui aura la plus grande différence entre les buts marqués et ceux encaissés va se qualifier. Si l'une des équipes a moins de $2\,(n-1)$ points, alors il en existera une autre qui en aura plus de $2\,(n-1)$, puisque le nombre total de points est égal à $2\,n\,(n-1)$. Si $m = n$, bien sûr, le nombre minimum de points est zéro.
Le cas $1 < m < n$. L'équipe qualifiée avec le nombre minimum de points sera la m - ième. Pour qu'elle ait le minimum de points il faut que les $(m-1)$ premières équipes obtiennent le maximum de points possible. D'où l'équipe h - ième, $1 \leqslant h \leqslant m-1$, aura $4\,(n-i)$ points. Les $(m-1)$ équipes auront $4\,(n-1) + 4\,(n-2) + \ldots + 4\,(n-m+1) = 2\,(m-1)\,(2\,n-m)$ points. Du nombre total de $2\,n\,(n-1)$ points on enlève les points des $(m-1)$ premières équipes et on trouve $2\,(n-m)\,(n-m+1)$, qui représente les points des $(n-m+1)$ dernières équipes. Donc $\dfrac{2\,(n-m)(n-m+1)}{n-m+1} = 2\,(n-m)$, qui est le nombre minimum de points tel qu'une équipe puisse se qualifier.

1.5. A un concours de pronostics concernant 13 matchs de football, une personne joue en utilisant m doublets et n triplets, $0 \leq m + n \leq 13$, $m, n \in \mathbb{N}$.

a) Dans le cas où il obtient une variante à 13 résultats exacts, implicitement combien de variantes à 12 et à 11 résultats exacts obtient-il ?

b) De même, s'il obtient une variante à 12 résultats exacts, implicitement combien de variantes à 11 et à 10 résultats exacts va-t-il obtenir ?

SOLUTION :

Il y a 13 matchs et pour chacun il existe trois possibilités : 1, X ou 2 (c'est-à-dire, rapporté à la première équipe, victoire, match nul ou défaite). On a en tout 3^{13} variantes possibles (plus de 1.000.000). Ayant m doublets et n triplets, il en résulte qu'on a $13 - m - n$ solitaires (c'est-à-dire, des matchs pour lesquels on donne un seul pronostic). On forme $2^m \cdot 2^n$ variantes en tout.

a) On obtient $m + 2n$ variantes à 12 résultats exacts.
Si $m \geq 2$ et $n \geq 2$ on a $C_m^2 + 4 \cdot C_n^2 + 2mn$ variantes à 11 résultats exacts; si $m \geq 2$ et $n < 2$ on a $C_m^2 + 2mn$; si $m < 2$, $n < 2$ on a $2 \cdot mn$; si $m < 2$, $n \geq 2$ on a $4 \cdot C_n^2 + 2mn$;

b) Le cas : où un solitaire est faux. Alors il en résulte :

- $m+2n$ variantes à 11 résultats exacts.
- $C_m^2 + 4 \cdot C_n^2 + 2 \cdot mn$ variantes à 10 résultats exacts, ni $m \geq 2$, $n \geq 2$.
- $4 \cdot C_n^2 + 2 \cdot mn$, si $m < 2$, $n \geq 2$, variantes à 10 résultats exacts.
- $C_m^2 + 2mn$, si $m \geq 2$, $n < 2$, variantes à 10 résultats exacts.
- $2mn$, si $m < 2$, $n < 2$, variantes à 10 résultats exacts.

Le cas : où un doublet est faux.

On a

- $(m - 1) + 2n$ variantes à 11 résultats exacts.
- $C_{m-1}^2 + 4 \cdot C_n^2 + 2(m-1)n$ variantes à 10 résultats exacts. si $m \geq 3$, $n \geq 2$.
- $4 \cdot C_n^2 + 2 \cdot (m-1) \cdot n$ variantes à 10 résultats exacts. si $m < 3$, $n \geq 2$.
- $C_{m-1}^2 + 2 \cdot (m-1) \cdot n$ variantes à 10 résultats exacts, si $m \geq 3$, $n < 2$.
- $2 \cdot (m-1) \cdot n$ variantes à 10 résultats exacts si $m < 3$, $n < 2$.

1.6. A une tournée d'échecs ont participé 10 joueurs : A_1, A_2, ... A_{10} - chaque joueur d'échecs a joué avec chacun des autres partenaires un match. Pour chaque victoire il a gagné un point, pour chaque partie nulle un demi-point, et pour chaque défaite zéro point.

A la fin de la tournée, le classement était :

1.	A_1	9,5 points	6.	A_6	4 points
2.	A_2	9 points	7-9.	A_7	2 points
3.	A_3	6 points	7-9.	A_8	2 points
4-5.	A_4	5 points	7-9.	A_9	2 points
4-5.	A_5	5 points	10.	A_{10}	1 point

Montrer que dans ce classement il existe au moins trois fautes !

SOLUTION:

La première faute : A_1 ne peut accumuler qu'au maximum 9 points, parce qu'il joue seulement 9 matchs, donc pas 9,5 points.

La deuxième faute : A_2, situé à la deuxième place dans le classement, ne peut accumuler qu'au maximum 8 points, pas 9 points, parce qu'il peut gagner au maximum 8 matchs (le neuvième match, disputé contre A_1 sera perdu; contre A_1, le joueur A_2 ne peut pas faire match nul puisqu'il en résulterait que A_2 occuperait la place 1 - 2, pas 2).

La troisième faute : dans cette tournée se sont joués 9 + 8 + 7...+ 1 = = 45 matchs, donc le nombre total des points du classement doit être 45, que :

$$9,5 + 9 + 6 + 2.5 + 4 + 3.2 + 1 = 45,5 \neq 45.$$

1.7. Soit une grille de mots-croisés (de n lignes, m colonnes et p cases noires), telle qu'il n'existe pas deux cases noirs qui aient un côté commun.

a) Déterminer le nombre total des mots (horizontaux et verticaux) - on appelle "mot" même ceux qui contiennent seulement une lettre-.

b) Trouver la différence entre le nombre des mots horizontaux et celui des mots verticaux.

SOLUTION:

a) Montrons que $N = n + m + CNB + 2 \cdot CNC$, où

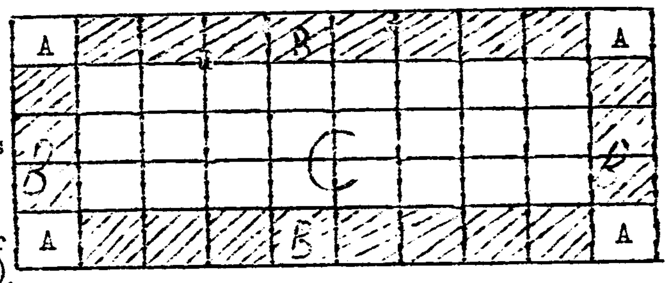
N = le nombre total des mots de la grille
CNB = le nombre des cases noires de la zone B
CNC = le nombre des cases noires de la zone C.

Considerons la grille partagée en 3 zones :

1° les quatre sommets de la grille (la zone A),

2° la bordure de la grille moins les quatre sommets (la zone B),

3° la partie de l'intérieur de la grille (la zone C).



On suppose au début la grille sans aucune case-noire.

Alors, elle a $n + m$ mots.

- Si nous posons une case noire dans la zone A, le nombre total des mots reste le même. (Donc le nombre des cases noires de la zone A ne présente pas d'importance.).

- Si nous posons une case noire dans la zone B, par exemple sur la ligne 1 et la colonne J, $1 < J < m$, le nombre des mots croît d'une unité [puisque dans la ligne 1 se sont formés maintenant deux mots (avant il y avait un seul mot), et dans la colonne j il reste aussi un seul mot]. La situation est analogue si on pose une case noire sur la colonne 1 et la ligne i , $1 < i < n$, (on peut renverser la grille : l'horizontal passe en vertical et réciproquement). Donc, pour chaque case noire de la zone B on ajoute un mot au nombre total des mots de la grille.

- Si on pose une case noire dans la zone C, par exemple sur la ligne i , $1 < i < n$, et la colonne j, $1 < j < m$, alors le nombre des mots croît de deux unités : tant dans la ligne i que dans la

colonne j se trouvent maintenant deux mots, à l'encontre de la situation antérieure où l'on a seulement un mot dans chacune. Donc, pour chaque case noire de la zone C on ajoute deux mots au nombre total des mots de la grille.

b) Partageons la zone B en deux parties :

- la zone BO = la partie horizontale de B (les lignes 1 et n)

- la zone BV = la partie verticale de B (les colonnes 1 et m).

Alors : NO - NV = n - m + CNBO - CNBV, où

NO = le nombre des mots horizontaux
NV = le nombre des mots verticaux
CNBO - le nombre des cases noires de BO
CNBV = le nombre des cases noires de BV.

La démonstration de cette proposition suit le fil de la précédente, et utilise les résultats suivants :

- S'il n'y a aucune case noire dans la grille, la différence NO - NV est égale à n - m.

- Si on a une case noire dans la zone A, la différence reste la même.

- De même pour la zone C.

- Si on a une case noire dans la zone BO, alors la différence sera n - m + 1, et si la case noire se trouve dans la zone BV, alors la différence sera n - m - 1.

De là résulte b).

A) R I T H M E T I Q U E

2.8. Déterminer le dernier chiffre des nombres de la suite de Fermat : $F_n = 2^{2^n} + 1$, avec $n \in \mathbb{N}$.

SOLUTION:

Pour $n = 0$ on a $F_0 = 3$, et pour $n = 1$ on trouve $F_1 = 5$.
Pour $n \geq 2$ il en résulte que $F_n = 2^{2^n} + 1 = 2^{4 \cdot 2^{n-2}} + 1 = 16^{2^{n-2}} + 1 = 16^K + 1$ qui contient, comme dernier chiffre, $6 + 1 = 7$, parce que la puissance de 16 se termine par 6.

2.9. Soit p le produit des n premiers nombres premiers.

Déterminer l'ensemble $F = \{\alpha \in \mathbb{N} \mid \alpha ! = \mathcal{M}_p\}$.

($\mathcal{M}_p$ signifie multiple de p.)

SOLUTION:

Pour que $\alpha ! = \mathcal{M}_{p_i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, il faut que $\alpha \geqslant p_i$.

Donc $\alpha \geqslant \max_i \{p_i\} = p_n$.

$p_n ! = 1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot 4 \cdot p_3 \cdots p_{n-1} \cdots p_n$, d'où $p_n ! = \mathcal{M}_p$.

p_n est le plus petit nombre qui ait cette propriété, puisque s'il existe un $\alpha' < p_n$ alors $\alpha' ! \neq \mathcal{M}_{p_n}$.

Si $\beta > p_n$ alors, bien sûr , $\beta ! = \mathcal{M}_p$ .Ainsi que :

$F = \{p_n , p_n + 1 , p_n + 2 , \dots\}$.

2.10. Déterminer le plus petit nombre naturel tel que sa factorielle soit multiple de chacun des entiers 1970, 1980, 1990 et 2000.

SOLUTION:

Le plus grand nombre premier qui divise l'un des entiers de l'énoncé c'ést 199.

Soit $\alpha \in \mathbb{N}$ le nombre cherché. Alors $\alpha\,! = \mathcal{M}\,1990$,
d'où $\alpha = \mathcal{M}\,199$. Donc $\alpha \geqslant 199$. On prend $\alpha = 199$.
$199\,! = \mathcal{M}\,10$ parce que $10 < 199$. On a aussi $199\,! = \mathcal{M}\,197$.
Puisque $(10,197) = 1$, il en résulte que $199\,! = \mathcal{M}\,1970$.
$199\,! = \mathcal{M}\,1990$.
$199\,! = \mathcal{M}\,36$ et $199\,! = \mathcal{M}\,55$, mais $(36,55) = 1$;
d'où $199\,! = \mathcal{M}\,36.55 = \mathcal{M}\,1980$.
$199\,! = \mathcal{M}\,16$ et $199\,! = \mathcal{M}\,125$ et $(16,125) = 1$;
donc $199\,! = \mathcal{M}\,2000$.

On suppose par l'absurde que α n'est pas le plus petit. Alors, il existe $\alpha' < 199$, tel que $\alpha'\,! = \mathcal{M}\,199$; contradiction.

2.11. On donne les naturels A et B. On considère $M_1 = A + B$, $M_2 = A - B$, $M_3 = A \cdot B$. On note X_m le nombre formé seulement par les m derniers chiffres de X.

a) Montrer que pour connaître les m derniers chiffres de M_1 il suffit de connaitre les m derniers chiffres de la somme $A_m + B_m$. Même question pour M_2 et M_3.

b) Généraliser.

c) Que peut-on dire des m derniers chiffres de A^B ?

SOLUTION:

a) On peut écrire $A = \mathcal{M}10^m + A_m$ et de même : $B = \mathcal{M}10^m + B_m$

Alors $M_1 = A + B = \mathcal{M}10^m + (A_m + B_m)$.

Aussi $M_2 = A - B = \mathcal{M}10^m + (A_m - B_m)$ et

$M_3 = A \cdot B = \mathcal{M}10^m + (A_m \cdot B_m)$.

b) Généralisation :

Si $E(A_1, \dots, A_n)$ est une expression arithmétique où se rencontrent seulement les opérations $+$, $-$, $\cdot$ et si $A_1, \dots, A_n$ sont naturels, alors

$$E_m(A_1, \dots, A_n) = E(A_{1,m}, \dots, A_{n,m}),$$

où $A_{i,m}$ représente les m derniers chiffres de A_i.

La démonstration résulte de a).

c) A^B est une multiplication répétée. Donc

$$(A^B)_m = A_m^B .$$

2.12. En sachant qu'il est h heures et m minutes, $1 \leqslant h \leqslant 12$, $0 \leqslant m < 60$, trouver après combien de temps les aiguilles de la montre vont former un angle α, avec $0 \leqslant \alpha < 360°$.

SOLUTION:

Tout d'abord on détermine les vitesses angulaires pour chaque aiguille de la montre.

La grande aiguille parcourt 360° en une heure;

d'où $V_G = 6°/\text{min}$.

La petite aiguille parcourt 360° en 12 heures ; d'où

$V_p = 0{,}5° /\text{min}$.

On calcule l'angle existant déjà entre les aiguilles de la montre à h heures et m minutes.

La grande aiguille a parcouru 6m degrés.

La petite aiguille a parcouru $(60\,h + m) \cdot 0{,}5 = 30\,h + 0{,}5\,m$ degrés.

Notons x (en minutes) l'inconnue du problème.

L'angle formé par les aiguilles c'est $|6m - 30h - 0{,}5\,m| = |5{,}5m - 30\,h|$. (On considère des angles positifs, parceque dans le problème on ne spécifie pas le sens des angles.)

A) Cas où $|5{,}5m - 30h| \leqslant \alpha$.

a) $5{,}5m - 30h \geqslant 0 \iff$ la grande aiguille a parcouru une distance (en degrés) supérieure ou égale à la distance parcourue par la petite aiguille.

On a $6x - 0{,}5x = \alpha - (5{,}5m - 30h) \Rightarrow x = \dfrac{\alpha + 30h - 5{,}5m}{5{,}5}$.

b) $5{,}5\,m - 30\,h < 0$. C'est la situation contraire.

On a $6\,x - 0{,}5\,x = \alpha - (5{,}5\,m - 30\,h) \Rightarrow x = \dfrac{\alpha + 30h - 5{,}5m}{5{,}5}$.

B) Cas où $|5{,}5\,m - 30\,h| > \alpha$.

a) $5{,}5\,m - 30\,h \geqslant 0$.

On a $6x - 0{,}5x = \alpha + 360 - (5{,}5m - 30h) \Rightarrow x = \dfrac{\alpha + 360 + 30h - 5{,}5m}{5{,}5}$

b) $5{,}5\,m - 30\,h < 0$.

On a $6x - 0{,}5x = |5{,}5m - 30h| - \alpha = 30h - 5{,}5m - \alpha$

$\Rightarrow x = \dfrac{30\,h - 5{,}5m - \alpha}{5{,}5}$.

2.13. Soient $a_1, \ldots, A_{2n+1}$ des entiers, et $b_1, \ldots, b_{2n+1}$ les mêmes nombres dans un autre ordre. Montrer que l'expression $E = (a_1 \pm b_1) \ldots (a_{2n+1} \pm b_{2n+1})$ est un nombre pair, où les signes + et - sont arbitraires pour chaque parenthèse.

(Généralisation du problème A.7 , page 105, de D. Gerll et G. Girard, "Les olympiades internationales de mathématique", Hachette 1976.)

SOLUTION:

On suppose que l'expression E est impaire. Il en résulte que chaque parenthèse est impaire, d'où chaque parenthèse contient un nombre pair et l'autre impair.

On a donc 2n + 1 nombres pairs. Mais, si dans une parenthèso se trouve un a_{i_o} pair, alors il existe une autre parenthèse où se trouve un $b_{j_o} = a_{i_o}$, donc b_{j_o} est pair.

Ainsi le nombre des pairs est un nombre pair, qui bien sûr est différent de 2n + 1. Contradiction.

2.14. Résoudre l'équation : $X - \phi(X) = 24$, en sachant que $\phi(X)$ représente le nombre des nombres positifs, inférieurs à X et premiers à X.

SOLUTION:

Parce que $\phi(X) \in \mathbb{N}$, il en résulte que $X = 24 + \phi(X) \in \mathbb{N}^*$ et $X \geq 24$. Soit $X = P_1^{\alpha_1} \dots P_s^{\alpha_s}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$, P_i premiers, différents entre eux, $i = \overline{1,s}$.

$\phi(X) = P_1^{\alpha_1 - 1} \dots P_s^{\alpha_s - 1} \cdot (P_1 - 1) \dots (P_s - 1)$, ϕ étant la fonction d'Euler de la théorie des nombres.

$X - \phi(X) = P_1^{\alpha_1 - 1} \dots P_s^{\alpha_s - 1} \cdot \left[P_1 \dots P_s - (P_1 - 1) \dots (P_s - 1)\right] =$
$= 24 = 2^3 \cdot 3^1$;

Donc, évidemment, X a la forme : $X = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2}$,

avec $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}^*$. Alors $s = 2$.

On obtient $X - \phi(X) = P_1^{\alpha_1 - 1} \cdot P_2^{\alpha_2 - 1} \cdot \left[P_1 \cdot P_2 - (P_1 - 1) \cdot (P_2 - 1)\right]$,

c'est-à-dire $X - \phi(X) = 2^{\alpha_1 - 1} \cdot 3^{\alpha_2 - 1} \cdot [6 - 1 \cdot 2] = 2^3 \cdot 3^1$,

ou $2^{\alpha_1 - 1} \cdot 3^{\alpha_2 - 1} = 2^1 \cdot 3^1$, d'où $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ et en conclusion $X = 2^2 \cdot 3^2 = 36$.

2.15. Soit $\phi(n)$ la fonction d'Euler. Montrer que :

$\phi(n)$ est nombre premier si et seulement si $n \in \{0, \pm 3, \pm 4, \pm 6\}$.

SOLUTION:

Suffisance.

$\phi(0) = \phi(\pm 3) = \phi(\pm 4) = \phi(\pm 6) = 2$ qui est nombre premier.

Nécessité.

$\phi(\pm 1) = \phi(\pm 2) = 1$ qui n'est pas un nombre premier. Donc

$n \notin \{\pm 1, \pm 2\}$.

Soit $n = \pm p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$ avec $p_1, \dots, p_s$ nombres premiers différents.

$\alpha_i \in \mathbb{N}^*$, $i \in \{1, 2, \dots, s\}$.

$\phi(n) = p_1^{\alpha_1 - 1}.(p_1 - 1) \dots p_s^{\alpha_s - 1}.(p_s - 1) = \mathcal{M}_2$ pour

$n \notin \{\pm 1, \pm 2\}$ parce que $p_i - 1 = \mathcal{M}_2$ ou $p_j^{\alpha_j - 1} = \mathcal{M}_2$.

Comme $\phi(n)$ est un nombre premier il en résulte que $\phi(n) = 2$.

Donc $p_i - 1 = 1$ ou $p_i - 1 = 2$. Il suit que $p_i = 2$ ou 3.

$p_i = 2 \Rightarrow \alpha_i = 2$. Donc $n = 4, 3, 6$. Ainsi $n \in \{\pm 3, \pm 4, \pm 6\}$.

Mai $\phi(0) = 2$ qui est premier, donc

$n \in \{0, \pm 3, \pm 4, \pm 6\}$.

2.16. Soit un nombre entier m tel que $\phi(m) = \mathcal{M}4$, où ϕ représente l'indicateur d'Euler. Montrer qu'il existe un nombre pair de racines primitives modulo m. (Un entier a s'appelle racine primitive modulo m, si $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ et $a^{K} \not\equiv 1 \pmod{m}$ pour $1 \leqslant K < \phi(m)$.)

SOLUTION:

1) S'il n'existe pas de racine primitive modulo m, alors on a 0 racine et 0 est pair.

2) S'il existe des racines primitives, soit r l'une de celles-ci. On a $(r, m) = 1$, $r^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ et $r^{K} \not\equiv 1 \pmod{m}$ pour $1 \leqslant K < \phi(m)$. Montrons que $m - r$ aussi est une racine primitive modulo m.

A) Tout d'abord $m - r \not\equiv r \pmod{m}$, puisque dans le cas contraire il en résulterait $2r \equiv 0 \pmod{m}$, ou $2r = t \cdot m$, avec $t \in \mathbb{Z}$.

Comme $\phi(m) = \mathcal{M}4$, on a $m \notin \{0, \pm 1, \pm 2\}$.

α) $m = 2h$, $h \in \mathbb{Z} - \{0, \pm 1\}$. On a :

$m \mid 2r \Rightarrow 2h \mid 2r \Rightarrow h \mid r \Rightarrow (r,m) = h \neq \pm 1$, absurde.

β) $m = 2h + 1$, $h \in \mathbb{Z} - \{-1, 0\}$. On a :

$m \mid 2r \Rightarrow m \mid r \Rightarrow (r,m) = m \neq \pm 1$, absurde.

D'où $m - r \not\equiv r \pmod{m}$.

B) $(m, m-r) = d \Rightarrow d \mid m$ et $d \mid m-r \Rightarrow d \mid r \Rightarrow d = (r,m) = 1$; donc $(m - r, m) = 1$.

$(m - r)^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, conformément au théorème d'Euler.

On suppose par l'absurde qu'il existe $\mu \in \mathbb{N}^*$, $\mu < \phi(m)$ avec $(m - r)^{\mu} \equiv 1 \pmod{m}$. Il en résulte $1 \equiv (m - r)^{\mu} \equiv (-r)^{\mu} \equiv$ $\equiv (-1)^{\mu} r^{\mu} \pmod{m}$. D'où μ est impair (sinon il en résulterait $r^{\mu} \equiv 1 \pmod{m}$ et $1 \leqslant \mu < \phi(m)$, c'est-à-dire r ne serait pas racine primitive). Donc $\mu = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $r^{\mu} \equiv -1 \pmod{p}$, ou $r^{2\mu} \equiv 1 \pmod{p}$. Mais $\mu < \phi(m)$, cela implique que $2\mu < 2 \cdot \phi(m)$. Comme r est une racine primitive on a $2\mu = \phi(m)$, ou $\phi(m) =$ $= 2 \cdot (2p + 1) \neq \mathcal{M}4$. Contradiction. Ainsi $(m - r)^{\mu} \not\equiv 1 \pmod{m}$ pour $1 \leqslant \mu < \phi(m)$, donc $m - r$ est aussi une racine primitive.

2.17. Soit m un nombre naturel $\geqslant 3$, et $a_1, \dots a_p$ tous les nombres positifs inférieurs à m et étrangers à m.

Alors $a_1 + a_2 + \dots + a_p = \mathcal{M} m$.

SOLUTION:

Montrons que $p = \mathcal{M} 2$.

On voit que, si $o < a < m$ et $(a,m) = 1$, alors on a aussi $o < m-a < m$ et $(m-a,m) = 1$, parce que :

$o < a < m \Rightarrow - m < a-m < m-m \Rightarrow o < m-a < m$;

soit $d = (a-m, m)$, il en résulte $d | m-a$ et $d | m$, d'où $d | a$ et $d | m$, donc d divise $(a,m) = 1$, et ainsi $d = 1$.

On a : $\forall a \in \{a_1, \dots, a_p\}$, $\exists\, m-a \in \{a_1, \dots, a_p\}$ tel que $m-a \neq a$;

(dans le cas contraire, il en résulterait que $m = 2a$ et $(a,m) = a \neq 1$ ou $m = 2$, ce qui est impossible). (1)

Mais $a + (m-a) = m = \mathcal{M} m$ et, grâce à (1) on obtient la conclusion du problème.

2.18. Soient a, b, c, trois nombres entiers, tels que $a^2 + c^2 \neq 0$ et $b^2 + c^2 \neq 0$.

Démontrez que $$\frac{(a,b,c).\,c}{(a,c).(b,c)} \in \mathbb{Z}.$$

(La notation $(x_1, \ldots, x_n)$ représente le plus grand commun diviseur des nombres $x_1, \ldots, x_n$.)

SOLUTION:

Soit $d = (a, b, c)$. Cela implique que $a = a'd$, $b = b'd$, $c = c'd$ et $(a', b', c') = 1$. Alors :

$(a, c) = (a'd, c'd) = d\cdot(a', c') = d.\,d_{13}$ (on a noté $(a', c') = d_{13}$) ;

d'où $c' = d_{13}.\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{Z}$.

$(b, c) = (b'd, c'd) = d\cdot(b', c') = d.d_{23}$ (on a noté $(b', c') = d_{23}$);

d'où $c' = d_{23}.\beta$, avec $\beta \in \mathbb{Z}$.

Mais $(d_{13}, d_{23}) = ((a', c'), (b'c')) = (a', b', c') = 1$.

Puisque $d_{13}.\alpha = d_{23}.\beta$, $(d_{13}, d_{23}) = 1$, et que tous les nombres sont entiers, il en résulte que d_{23} divise α ,

c'est-à-dire $\alpha = d_{23}\alpha'$, avec $\alpha' \in \mathbb{Z}$. Donc $c = d.d_{13}.d_{23}.\alpha'$;

Ainsi que $$\frac{(a,b,c).\,c}{(a,c).(b,c)} = \frac{d.d.d_{13}.\,d_{23}.\alpha'}{d.d_{13}.d.\,d_{23}} = \alpha' \in \mathbb{Z}.$$

Les conditions de l'énoncé du problème assurent l'existence de l'expression, c'est-à-dire, le dénominateur est différent de zéro.

2.19. Soient a_i, b_i $\in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,n}$. Montrer que :

$$(a_1 \ldots a_n , b_1 \ldots b_n) \geqslant \prod_{i=1}^{n} (a_i , b_i) ,$$

où (α, β) représente le plus grand commun diviseur des nombres α et β.

SOLUTION:

On applique le raisonnement par récurrence.

Pour i = 1 c'est évident. Pour i = 2, il faut montrer que $(a_1 a_2 , b_1 b_2) \geqslant (a_1, b_1).(a_2, b_2)$;

Soient $a_1 = a_{11} d_{a_1 b_1}$, $b_1 = b_{11} d_{a_1 b_1}$ avec $(a_{11} , b_{11}) = 1$

et soient $a_2 = a_{21} d_{a_2 b_2}$, $b_2 = b_{21} d_{a_2 b_2}$ avec $(a_{21}, b_{21}) = 1$.

Alors $(a_1 a_2, b_1 b_2) = d_{a_1 b_1} . d_{a_2 b_2} . (a_{11} a_{221}, b_{11} b_{21}) \geqslant$

$$\geqslant d_{a_1 b_1} . d_{a_2 b_2} = (a_1, b_1). (a_2, b_2).$$

On suppose l'inégalité vraie pour les valeurs de i qui sont inférieures à n. Il en résulte :

$$(a_1 \ldots a_n a_{n+1}, b_1 \ldots b_n b_{n+1}) \geqslant (a_1 \ldots a_n, b_1 \ldots b_n).(a_{n+1}, b_{n+1}) \geqslant$$

$$\geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i)\right).(a_{n+1}, b_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n+1} (a_i, b_i) .$$

2.20. Si $(a_i, b_i) \in \mathbb{N}^2$, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ et $[\alpha, \beta]$ représente le plus petit commun multiple des nombres α et β, alors :

$$[a_1 \ldots a_n, b_1 \ldots b_n] \leqslant \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \cdot$$

SOLUTION:

On va démontrer par raisonnement par récurrence.

Le cas $i = 1$ est évident. Pour $i = 2$, il faut montrer que

$$[a_1 a_2, b_1 b_2] \leqslant [a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] \quad ;$$

Ecrivons $a_1 = a_{11} d_{a_1 b_1}$, $b_1 = b_{11} d_{a_1 b_1}$ avec $(a_{11}, b_{11}) = 1$,

et $a_2 = a_{21} d_{a_2 b_2}$, $b_2 = b_{21} d_{a_2 b_2}$ avec $(a_{21}, b_{21}) = 1$.

Alors $[a_1 a_2, b_1 b_2] = d_{a_1 b_1} \cdot d_{a_2 b_2} \cdot [a_{11} a_{21}, b_{11} b_{21}] \leqslant$

$$\leqslant d_{a_1 b_1} \cdot d_{a_2 b_2} \cdot a_{11} \cdot a_{21} \cdot b_{11} \cdot b_{21} = [a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] \quad ;$$

Supposons la propriété vraie pour $i \leqslant n$, elle est vraie aussi pour $i = n + 1$, parce que :

$$[a_1 \ldots a_n a_{n+1}, b_1 \ldots b_n b_{n+1}] \leqslant [a_1 \ldots a_n, b_1 \ldots b_n] \cdot [a_{n+1}, b_{n+1}] \leqslant$$

$$\leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \right) \cdot [a_{n+1}, b_{n+1}] \quad ;$$

Donc le problème est démontré.

2.11. Soit m un nombre naturel, $1 \leqslant n \leqslant 5$.

Montrer que si $9^m = \overline{a_1\ldots a_m}$, alors $\underbrace{9\ldots 9}_{n \text{ fois}}{}^m =$

$$= \overline{\underbrace{9\ldots9}_{n-1}a_1\underbrace{0\ldots0}_{n-1}a_2\underbrace{9\ldots9}_{n-1}\ldots a_n} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*.$$

SOLUTION:

Cas où m = 1. $\quad 9^1 = 9, \quad \underbrace{9\ldots9}_{n}{}^1 = \underbrace{9\ldots9}_{n-1}9.$

Cas où m = 2. $\quad 9^2 = 81, \quad \underbrace{9\ldots9}_{n}{}^2 = (1\underbrace{00\ldots0}_{n} - 1)^2 =$

$$= 1\underbrace{0\ldots0}_{2n} - 2\underbrace{0\ldots0}_{n} + 1 = 1\underbrace{0\ldots0}_{n}\underbrace{0\ldots01}_{n-1} - 2\underbrace{0\ldots0}_{n} = \underbrace{9\ldots9}_{n-1}8\underbrace{0\ldots01}_{n-1} ;$$

Cas où m = 3. $\quad 9^3 = 729, \quad \underbrace{9\ldots9}_{n}{}^3 = (1\underbrace{0\ldots0}_{n} - 1)^3 =$

$$= 1\underbrace{0\ldots0}_{3n} - 3\underbrace{0\ldots0}_{2n} + 3\underbrace{0\ldots0}_{n} - 1 = 1\underbrace{0\ldots0}_{n}\underbrace{0\ldots03}_{n-1}\underbrace{0\ldots0}_{n} -$$

$$- 3\underbrace{0\ldots0}_{n}\underbrace{0\ldots01}_{n} = \underbrace{9\ldots9}_{n-1}7\underbrace{0\ldots0}_{n-1}2\underbrace{9\ldots9}_{n-1}9.$$

Cas où m = 4. $\quad 9^4 = 6561, \quad \underbrace{9\ldots9}_{n}{}^4 = (1\underbrace{0\ldots0}_{n} - 1)^4 =$

$$= 1\underbrace{0\ldots0}_{4n} - 4\underbrace{0\ldots0}_{3n} + 6\underbrace{0\ldots0}_{2n} - 4\underbrace{0\ldots0}_{n} + 1 = 1\underbrace{0\ldots0}_{n}\underbrace{0\ldots06}_{n}\underbrace{0\ldots0}_{n}\underbrace{0\ldots01}_{n} -$$

$$- 4\underbrace{0\ldots0}_{n}\underbrace{0\ldots04}_{n}\underbrace{0\ldots0}_{n} = \underbrace{9\ldots9}_{n-1}6\underbrace{0\ldots0}_{n-1}5\underbrace{9\ldots9}_{n-1}6\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1.$$

Cas où m = 5. $\quad 9^5 = 59049, \quad \underbrace{9\ldots9}_{n}{}^5 = (1\underbrace{0\ldots0}_{n} - 1)^5 = 1\underbrace{0\ldots0}_{5n} -$

$$- 5\underbrace{0\ldots0}_{4n} + 10\underbrace{0\ldots0}_{3n} - 10\underbrace{0\ldots0}_{2n} + 5\underbrace{0\ldots0}_{n} - 1 =$$

$$= \underbrace{9\ldots9}_{n-1}5\underbrace{0\ldots0}_{n-1}9\underbrace{9\ldots9}_{n-1}0\underbrace{0\ldots0}_{n-1}4\underbrace{9\ldots9}_{n-1}9.$$

Observation. Pour $m \geq 6$ la formule n'est plus vrais.

2.22. On considère l'ensemble $A = \left\{ \underbrace{9\ldots9}_{n} \cdot m \mid m \in \mathbb{N}^* \right\}$ et

$n \in \mathbb{N}^*$, invariable.

a) Calculer le plus grand nombre de 2 n chiffres de l'ensemble A, tel qu'il ne contient pas le chiffre 9.

b) Calculer le plus petit nombre de 2 n + K chiffres qui ne contient pas le chiffre 9.

Discussion.

SOLUTION:

a) On cherche le plus grand $m \in \mathbb{N}^*$, $m = \overline{b_1\ldots b_n}$, qui multiplié par $\underbrace{9\ldots9}_{n}$ donne un produit de 2 n chiffres avec tous ses chiffres différents de 9.

$$\underbrace{9\ldots9}_{n} \cdot m = (1\underbrace{0\ldots0}_{n} - 1) \cdot m = \overline{m\underbrace{0\ldots0}_{n}} - m.$$

On fait la différence :

$$\begin{array}{r} \overline{b_1\ldots b_n\underbrace{0\ldots0}_{n}} - \\ b_1\ldots b_n \\ \hline = \quad ? \end{array}$$

S'il existe $b_j = 9$, $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, alors : s'il existe au moins un chiffre non nul derrière le b_j, par la soustraction il résulterait $b_j = 9$ dans le résultat, si tous les $b_h = 0$, $h \in \{j+1, \ldots, n\}$ par la soustraction dans le résultat il existerait au moins un chiffre de 9 à l'une des places $j+1, \ldots, n$.

Le cas suivant c'est $m = \underbrace{8\ldots8}_{n-1}9$. On effectue la différence (c'est-à-dire la multiplication $\underbrace{9\ldots9}_{n} \cdot \underbrace{8\ldots8}_{n-1}9$)

et on obtient le plus grand nombre de 2 n chiffres de l'ensemble A qui ne contient pas le chiffre 9, c'est $\underbrace{8\ldots8}_{n}\underbrace{1\ldots1}_{n}$.

b) Le nombre m aura n + K chiffres.

1°) Le cas $1 \leqslant K \leqslant n$. Démontrons que $m = 1\underbrace{0\ldots0}_{K-1}\underbrace{1\ldots1}_{n-1}2$ est le plus petit nombre de n + K chiffres qui aura la propriété demandée.

...

On ne peut avoir aucun zéro parmi les n derniers chiffres du nombre m parce qu'il en résulterait, par multiplication, au moins un chiffre 9 dans le produit; le dernier chiffre non nul de m est différent de 1 (de même motif) ; les autres chiffres de m peuvent être égaux à zéro, seulement le premier aura la valeur minimum 1 puisque $K \leqslant n \Longrightarrow$ $\Longrightarrow K - 1 \leqslant n - 1$.

$$\underbrace{9\ldots9}_{n}\,\cdot$$

$$1\,\underbrace{0\ldots0}_{K-1}\,\underbrace{1\ldots1}_{n-1}2$$

$$\underbrace{1\ldots1}_{n-K+1}\,\underbrace{1\ldots1}_{K-1}\,\underbrace{8\ldots8}_{n}$$

(ici on a écrit directement que $\underbrace{9\ldots9}_{n}\cdot\underbrace{1\ldots1}_{n-1}2=\underbrace{1\ldots1}_{n}\,\underbrace{8\ldots8}_{n}$)

$$\underbrace{9\ldots9}_{k-1}\,\underbrace{9\ldots9}_{n-K+1}$$

$$= 1\,\underbrace{0\ldots0}_{K-1}\,\underbrace{1\ldots1}_{n-K}\,0\,\underbrace{1\ldots1}_{K-1}\,\underbrace{8\ldots8}_{n}$$

(On a encore utilisé la propriété que le plus petit nombre de 2n chiffres de A, qui ne contient pas de chiffres de 9 est $\underbrace{1\ldots1}_{n}\,\underbrace{8\ldots8}_{n}$, et que le m correspondant est $\underbrace{1\ldots1}_{n-1}2$.)

2°) Le cas $K \geqslant n + 1$. Maintenant, on ne peut pas écrire $m = 1\,\underbrace{0\ldots0}_{K-1}\,\underbrace{1\ldots1}_{n-1}2$ parce que $K - 1 > n - 1$ et le résultat de la multiplication contiendra des chiffres 9 :

$$\underbrace{9\ldots9}_{n}\,\cdot$$

$$1\,\underbrace{0\ldots0}_{K-1}\,\underbrace{1\ldots1}_{n-1}2$$

$$\underbrace{1\ldots1}_{n}\,\underbrace{8\ldots8}_{n} \qquad \text{(i)}$$

$$\underbrace{9\ldots9}_{n}$$

$$= \underbrace{9\ldots9}_{n}\,\underbrace{0\ldots0}_{K-n}\,\underbrace{1\ldots1}_{n}\,\underbrace{8\ldots8}_{n}$$

Cherchons le plus petit $m \in \mathbb{N}^*$, de $n + K$ chiffres, qui aura la propriété demandée. Les n derniers chiffres de m seront aussi $\underbrace{1\ldots1}_{n-1}2$. Le premier aussi 1.

Parmi les chiffres inconnus on ne peut pas avoir plus de n − 1 zéros consécutifs à cause de (1). Pour que n soit aussi petit que possible posons n − 1 zéros consécutifs après le premier chiffre, puis un chiffre 1 (le minimum non nul), encore n − 1 zéros consécutifs et encore un chiffre 1 etc.

Donc
$$m = \underbrace{1\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1\underbrace{0\ldots0}_{n-1}\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1\underbrace{0\ldots0}_{\rho}}_{K \text{ chiffres}}\underbrace{1\ldots1}_{n-1}2.$$

D'où, le nombre cherché est
$$\underbrace{9\ldots9}_{n}\cdot m = 1\underbrace{0\ldots0}_{K-1}\underbrace{1\ldots1}_{n-\rho-1}0\underbrace{1\ldots1}_{\rho}\underbrace{8\ldots8}_{n}$$

avec $\rho = K - n.\left[\frac{K}{n}\right] - 1$, où $[X]$ représente la partie entière de X.

Voici la multiplication :

$$\underbrace{9\ldots9}_{n}\cdot$$

$$\underbrace{1\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1\underbrace{0\ldots0}_{n-1}\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1\underbrace{0\ldots0}_{\rho}}_{K}\underbrace{1\ldots1}_{n-1}2$$

$$\underbrace{1\ldots1}_{n-\rho}\underbrace{1\ldots1}_{\rho}\underbrace{8\ldots8}_{n}$$

$$\underbrace{9\ldots9}_{\rho}\underbrace{9\ldots9}_{n-\rho}$$

$$\underbrace{9\ldots9}_{n}$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{9\ldots9}_{n}$$

$$\underbrace{1\underbrace{0\ldots0}_{n}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{n}\underbrace{0\ldots0}_{\rho}}_{K}\underbrace{1\ldots1}_{n-\rho-1}0\underbrace{1\ldots1}_{\rho}\underbrace{8\ldots8}_{n}$$

2.23. Si x, y $\in \mathbb{N}$, alors il existe Z $\in \mathbb{N}$ tel que

$$\overline{10X} \cdot \overline{10y} = \overline{1Z}.$$

Généraliser ce résultat au cas où le nombre de zéros entre 1 et x, et entre 1 et Y, est quelconque.

SOLUTION;

Soient $X = \overline{a_1 \ldots a_n}$, $0 \leqslant a_i \leqslant 9$, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$,

et $y = \overline{b_1 \ldots b_m}$, $0 \leqslant b_j \leqslant 9$, $j \in \{1,2,\ldots,m\}$, $m \in \mathbb{N}^*$...

On effectue la multiplication

$$\begin{array}{r} \overline{10\,a_1 \ldots a_n} \quad \times \\ \overline{10 b_1 \ldots b_m} \end{array}$$

n + 2 chiffres	. . . .	la multiplication par b_m
		⋮
n+2 chiffres	. . . .	la multiplication par b_1
n+2 chiffres	1 0	la multiplication par 1

= 1 . . . .

On a désigné par " . " un chiffre naturel compris entre 0 et 9.

Donc, le premier chiffre du produit c'est 1.

Plus généralement : si x, y $\in \mathbb{N}$, alors il existe Z $\in \mathbb{N}$

tel que $\overline{1\underbrace{0\ldots0}_{s \text{ chiffres}}x} \cdot \overline{1\underbrace{0\ldots0}_{t \text{ chiffres}}y} = \overline{1\underbrace{0\ldots0}_{u \text{ chiffres}}Z}$,

où on a $u = \inf(s, t) - 1$.

La démonstration de celui-ci copie la démonstration antérieure.

2.24. On considère une base b de numération, et p un diviseur simple de celle-ci tel que $(p, \frac{b}{p}) = 1$. Alors :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\exists A_n = \overline{a_1 \dots a_n}$ écrit en base b qui est divisible par p^n, avec $a_i \in \{1, 2, \dots, |p|\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

SOLUTION;

On applique le raisonnement par récurrence pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n = 1$ on a : $\exists A_1 = |p|$ qui est divisible par p^1.

(On observe que, puisque $p | b$, il résulte $b = Kp$, $K \in \mathbb{Z}$;

$1 = (p, \frac{b}{p}) = (p, K)$; aussi, tous les chiffres des nombres de la base b appartiennent à l'ensemble $M_b = \{0, 1, 2, \dots, |p|, |p| + 1, \dots \dots, b - 1\}$, et ils sont représentés par un seul symbole (par exemple, si $b > 10$, alors les chiffres 10, 11, ... sont notés par A, B, ...).

Donc $|p| \in M_p = \{1, 2, \dots, |p|\}$ et il est formé par un chiffre en base b; $(p | b \Rightarrow |p| \leqslant |b| = b)$;

On suppose la propriété vraie pour n, c'est - à - dire $\exists A_n = \overline{a_1 \dots a_n}$, écrit en base b, qui est divisible par p^n , où $a_i \in M_p$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Montrons qu'elle est vraie pour n + 1. Soit $A_{n+1} = \overline{x\, a_1 \dots a_n}$, avec $x \in M_p$, écrit en base b. On détermine un tel x pour que A_{n+1} se divise par p^{n+1} (il suffit de montrer qu'il existe un tel x).

$A_{n+1} = x.b^n + \overline{a_1 \dots a_n} = x.K^n.p^n + A_n = p^n (K^n.x + t)$, où $A_n = tp^n, t \in \mathbb{Z}$ (de l'hypothèse de récurrence).

$\exists x \in M_p$ tel que $K^n x + t \equiv 0 \pmod p \iff K^n x \equiv -t \pmod p$. Puisque $(p, \frac{b}{p}) = 1 = (p, K)$ on a : $(p, K^n) = 1$. D'où l'inverse de l'élément K^n par rapport au module p existe. La congruence antérieure devient : $x \equiv -t . (K^n)^{-1} \pmod p$ et on choisit le plus petit x non nul, c'est-à-dire le $x \in M_p$.

(Il existe $x \in M_p$, parceque M_p constitue un système complet de restes modulo p.)

2.35. Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. On note $a_n^{(m)} = m^{m^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{m}}}}}$ avec n chiffres m, et $b_n^{(m)} = \underbrace{\overline{m\ldots m}}_{n}^{\underbrace{\overline{m\ldots m}}_{n}}$. Pour chaque n et m comparer $a_n^{(m)}$ à $b_n^{(m)}$. Discussion. (Tous les nombres sont écrits en base 10.)

SOLUTION:

Dans les conditions précédents, on a :

Lemme 1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall m \geqslant 2$ $m^{4n} > \underbrace{\overline{m\ldots m}}_{n}$.

Démonstration : par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Le cas $n = 1$ implique $m^4 > m$ qui est vrai. On suppose la propriété vraie pour n, et on la démontre pour n + 1 :

$$m^{4(n+1)} = m^{4n} \cdot m^4 > \underbrace{\overline{m\ldots m}}_{n} \cdot m^4 \geqslant \underbrace{\overline{m\ldots m}}_{n} \cdot 16 = \underbrace{\overline{m\ldots m0}}_{n+1} + \underbrace{\overline{m\ldots m}}_{n} \cdot 6 >$$

$$> \underbrace{\overline{m\ldots m0}}_{n+1} + m = \underbrace{\overline{m\ldots mm}}_{n+1}.$$

Lemme 2. $\forall n \geqslant 3$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $b_n^{(m)} > 4(n+1) \cdot \underbrace{\overline{m\ldots m}}_{n+1}$.

Démonstration. $\underbrace{\overline{m\ldots m}}_{n}^{\,2} = \underbrace{\overline{m\ldots m}}_{n} \cdot \underbrace{\overline{m\ldots m}}_{n} > \underbrace{\overline{m\ldots mm}}_{n+1}$ puisque $n \geqslant 3$.

$\underbrace{\overline{m\ldots m}}_{n} > n + 1 \geqslant 4$ parce que $n \geqslant 3$.

$$b_n^{(m)} = \underbrace{\overline{m\ldots m}}_{n}^{\underbrace{\overline{m\ldots m}}_{n}} > \underbrace{\overline{m\ldots m}}_{n}^{\,4} > 4\,(n+1) \cdot \underbrace{\overline{m\ldots mm}}_{n+1}.$$

Lemme 3. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $n_0 \geqslant 3$, tel que $a_{n_0}^{(m)} > b_{n_0}^{(m)}$ alors $\forall m \geqslant 2$, $\forall n \geqslant n_0$ on a $a_n^{(m)} > b_n^{(m)}$.

Démonstration: par récurrence sur $n \geqslant n_0$.

Le cas $n = n_0$ est vrai par hypothèse. On suppose la propriété vraie pour n, et on la démontre pour n + 1 :

$$a_{n+1}^{(m)} = m^{a_n^{(m)}} > m^{b_n^{(m)}} > m^{4\,(n+1) \cdot \underbrace{\overline{m\ldots m}}_{n+1}} = (m^{4(n+1)})^{\underbrace{\overline{m\ldots m}}_{n+1}} > \underbrace{\overline{m\ldots m}}_{n+1}^{\underbrace{\overline{m\ldots m}}_{n+1}} =$$

$= b_n^{(m)}$. Pour la démonstration de ces inégalités on a utilité l'hypothèse de récurrence, le lemme 2, respectivement le lemme 1.

. ...

Lemme 4. $\forall\ m \geq 6 \quad a_3^{(m)} > b_3^{(m)}$.

Démonstration. Puisque $m \geq 6$ et grâce aux lemmes 1 et 2, il en résulte que :

$$m^m = m^2 \cdot m^{m-2} > 4.3.m^{m-2} > 4.3.6^4 > 4.3.\overline{mmm}$$

$$a_3^{(m)} = m^{m^m} > m^{4.3.\overline{mmm}} = (m^{4.3})^{\overline{mmm}} > \overline{mmm}^{\overline{mmm}} = b_3^{(m)} .$$

On a : $a_n^{(m)} = m^{m^{\cdot^{\cdot^{\cdot^m}}}}$ avec n chiffres de m, $b_n^{(m)} = \underbrace{\overline{m\ldots m}}_{n}{}^{\underbrace{\overline{m\ldots m}}_{n}}$

Cas $m = 1$. $a_1^{(1)} = 1 = b_1^{(1)}$.

$$a_n^{(1)} = 1 < \underbrace{\overline{1\ldots1}}_{n}{}^{\underbrace{\overline{1\ldots1}}_{n}} = b_n^{(1)} , \forall\ n \geq 2.$$

Cas $m = 2$. $a_1^{(2)} = 2 < 2^2 = b_1^{(2)}$

$a_2^{(2)} = 2^2 < 22^{22} = b_2^{(2)}$

$a_3^{(2)} = 2^4 < 222^{222} = b_3^{(2)}$

$a_4^{(2)} = 2^{16} < 2222^{2222} = b_4^{(2)}$

$a_5^{(2)} = 2^{65536} < 2^{3.22222} < 22222^{22222} = b_5^{(2)}$

D'après le lemme 1 on obtient :

$$2^{65536} > 2^5.2^{4.6} > 4.7.222222.$$

D'onc $a_6^{(2)} = 2^{2^{65536}} > 2^{4.7.222222} = (2^{4.7})^{222222} >$

$> 222222^{222222} = b_6^{(2)}$.

Du lemme 3 il résulte que $a_n^{(2)} > b_n^{(2)}$, $\forall\ n \geq 6$.

Cas $m = 3$. $a_1^{(3)} = 3 < 3^3 = b_1^{(3)}$

$a_2^{(3)} = 3^3 < 33^{33} = b_2^{(3)}$

$a_3^{(3)} = 3^{27} < 333^{333} = b_3^{(3)}$

A partir du lemme 1 on obtient $3^{27} > 3^3.3^{4.4} > 16.3333$.

...

Donc $a_4^{(3)} = 3^{3^{27}} > 3^{16.3333} = (3^{4.4})^{3333} > 3333^{3333} = b_4^{(3)}$.

Du lemme 3 il résulte $a_n^{(3)} > b_n^{(3)}$, $\forall n \geq 4$.

Cas m = 4. $a_1^{(4)} = 4 < 4^4 = b_1^{(4)}$

$a_2^{(4)} = 4^4 < 44^{44} = b_2^{(4)}$

$a_3^{(4)} = 4^{4^4} = 4^{256} < 444^{444} = b_3^{(4)}$.

Du lemme 1 il résulte $4^{256} > 4^2 \cdot 4^{4.4} > 4.4.4444$.

Donc $a_4^{(4)} = 4^{4^{256}} > 4^{4.4.4444} = (4^{4.4})^{4444} > 4444^{4444} = b_4^{(4)}$.

Du lemme 3 il résulte :

$\forall n \geq 4 \quad a_n^{(4)} > b_n^{(4)}$.

Cas n = 5. $a_1^{(5)} = 5 < 5^5 = b_1^{(5)}$

$a_2^{(5)} = 5^5 < 55^{55} = b_2^{(5)}$

$a_3^{(5)} = 5^{5^5} = 5^{3125} = (5^5)^{625} = 3125^{625} > 555^{555} = b_3^{(5)}$.

Du lemme 3 on a : $\forall n \geq 3$, $a_n^{(5)} > b_n^{(5)}$.

Cas n = 6. $a_1^{(m)} = m < m^m = b_1^{(m)}$

$a_2^{(m)} = m^m < \overline{mm}^{\overline{mm}} = b_2^{(m)}$

Du lemme 4 il résulte : $a_3^{(m)} > b_3^{(m)}$, et du lemme 3

on a : $a_n^{(m)} > b_n^{(m)}$, $\forall n \geq 3$

et le problème est complètement résolu.

LOGIQUE MATHEMATIQUE

———==ooOoo==———

——=oOo=——

3.26. Soient P et Q_i , $1 \leqslant i \leqslant n$, des propositions logiques. Montrer que la proposition logique " $\bigvee_{i=1}^{n} (P \wedge Q_i) \Rightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} (P \vee Q_i)$ " est toujours vraie.

SOLUTION:

Une proposition logique "$A \Longrightarrow B$" est fausse seulement lorsque $A = 1$ (vraie) et $B = 0$ (fausse). Montrons que cette situation n'existe pas.

Si " $\bigvee_{i=1}^{n} (P \wedge Q_i)$" $= 1$, alors $\exists\, i_0 \in \{1,\ldots, n\}$ tel que $P \wedge Q_i = 1$, c'est-à-dire $P = 1$ et $Q_{i_0} = 1$.

D'où : $P \vee Q_i = 1 \quad \forall\, i \in \{1,\ldots,n\}$ puisque $P = 1$,

donc " $\bigwedge_{i=1}^{n} (P \vee Q_i) = 1 \neq 0$.

($\wedge$ signifie "et", $\vee$ signifie "ou".)

3.27. Montrer que si les propositions logiques "$A_1 \Rightarrow A_2$" et "$B_1 \Rightarrow B_2$" sont vraies, alors les propositions logiques "$A_1 \wedge B_1 \Rightarrow A_2 \wedge B_2$" et "$A_1 \vee B_1 \Rightarrow A_2 \vee B_2$" sont vraies aussi .

SOLUTION:

Construisons le tableau de vérité suivant :

A_1	A_2	B_1	B_2	$A_1 \Rightarrow A_2$	$B_1 \Rightarrow B_2$	$A_1 \wedge B_1$	$A_2 \wedge B_2$	$A_1 \wedge B_1 \Rightarrow A_2 \wedge B_2$	$A_1 \vee B_1$	$A_2 \vee B_2$	$A_1 \vee B_1 \Rightarrow A_2 \vee B_2$
0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

On a noté "1" le vrai et "0" le faux. On voit immédiatement que lorsque "$A_1 \Rightarrow A_2$" et "$B_1 \Rightarrow B_2$" sont vraies en même temps, il en résulte que "$A_1 \wedge B_1 \Rightarrow A_2 \wedge B_2$" et "$A_1 \vee B_1 \Rightarrow A_2 \vee B_2$" sont vraies en même temps.

R I G O N O M E T R I E

===oooOooo===

-oOo-

4.2. Démontrer les formules de transformation suivantes des produits de fonctions trigonométriques en sommes :

1) $$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \dots \cos\alpha_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\mathcal{C}_n} \cos(\varepsilon_1\alpha_1+\dots+\varepsilon_n\alpha_n)$$

2) a) $$\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \dots \sin\alpha_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{2p-1}} \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{2p})\in\mathcal{C}_{2p}} (-1)^K \cos(\varepsilon_1\alpha_1 + \dots + \varepsilon_{2p}\alpha_{2p})$$

b) $$\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \dots \sin\alpha_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{2p+1})\in\mathcal{C}_{2p+1}} (-1)^K \sin(\varepsilon_1\alpha_1 + \dots + \varepsilon_{2p+1}\alpha_{2p+1})$$

où $\mathcal{C}_m = \bigcup_{K=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m) \mid \varepsilon_{i_1}=\varepsilon_{i_2}=\dots=\varepsilon_{i_K}=-1, \text{ et } \varepsilon_j = 1 \text{ pour } j \notin \{i_1,\dots,i_K\}\} - \{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m) \mid (-\varepsilon_1,\dots,-\varepsilon_m)\in\mathcal{C}_m\}$.

SOLUTION:

L'ensemble $\mathcal{C}_m$ contient tous les m - uplets $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m)$ qui ont les composantes $\varepsilon_i = \pm 1$ arrangées de toutes les manières possibles, mais telles que si $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m)\in\mathcal{C}_m$ alors $(-\varepsilon_1,\dots,-\varepsilon_m)\notin\mathcal{C}_m$. Donc $\mathcal{C}_m$ a en tout :

$(C_m^0 + C_m^1 + \dots + C_m^m) : 2 = 2^{m-1}$ éléments.

par C_m^K, $0 \leq K \leq m$, on a représenté le nombre des m-uplets tels que : K composantes sont égales à - 1, et les autres m - K sont égales à + 1.

1) On fait la démonstration par récurrence sur n.

Le cas n = 1 est évident. On suppose l'égalité vraie pour n, on la montre pour n + 1 :

...

$$(\cos\alpha_1\ldots\cos\alpha_n)\cos\alpha_{n+1} = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in\mathcal{E}_n}\cos(\varepsilon_1\alpha_1+\ldots+$$

$$+\varepsilon_n\alpha_n)\cos\alpha_{n+1} = \frac{1}{2^n}\sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in\mathcal{E}_n}\left[\cos(\varepsilon_1\alpha_1+\ldots+\right.$$

$$\left.+\varepsilon_n\alpha_n+\alpha_{n+1})+\cos(\varepsilon_1\alpha_1+\ldots+\varepsilon_n\alpha_n-\alpha_{n+1})\right] =$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n+1})\in\mathcal{E}_{n+1}}\cos(\varepsilon_1\alpha_1+\ldots+\varepsilon_{n+1}\alpha_{n+1}).$$

2) a) On applique aussi le raisonnement par récurrence pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Si $p = 1$ on a $\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 = \frac{(-1)^1}{2}\left[\cos(\alpha_1+\alpha_2)-\cos(-\alpha_1+\alpha_2)\right]$ qui est vraie.

On suppose l'égalité vraie pour p, on la montre pour $p+1$:

$$(\sin\alpha_1\ldots\sin\alpha_{2p})\sin\alpha_{2p+1}\sin\alpha_{2p+2} = \frac{(-1)^p}{2^{2p-1}}\sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2p})\in\mathcal{E}_{2p}}(-1)^K\cdot$$

$$\cdot\cos(\varepsilon_1\alpha_1+\ldots+\varepsilon_{2p}\alpha_{2p})\cdot$$

$$\cdot\sin\alpha_{2p+1}\sin\alpha_{2p+2} = \frac{(-1)^{p-1}}{2^{2p}}\sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2p})\in\mathcal{E}_{2p}}(-1)^K\cos(\varepsilon_1\alpha_1+\ldots+$$

$$+\varepsilon_{2p}\alpha_{2p})\cdot\left[\cos(\alpha_{2p+1}+\alpha_{2p+2})-\cos(-\alpha_{2p+1}+\alpha_{2p+2})\right] =$$

$$= \frac{(-1)^{p+1}}{2^{2p+1}}\sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2p})\in\mathcal{E}_{2p}}(-1)^K\cdot\left[\cos(\varepsilon_1\alpha_1+\ldots+\varepsilon_{2p}\alpha_{2p}+\right.$$

$$+\alpha_{2p+1}+\alpha_{2p+2})+\cos(\varepsilon_1\alpha_1+\ldots+\varepsilon_{2p}\alpha_{2p}-\alpha_{2p+1}-\alpha_{2p+2})-$$

$$-\cos(\varepsilon_1\alpha_1+\ldots+\varepsilon_{2p}\alpha_{2p}-\alpha_{2p+1}+\alpha_{2p+2})-\cos(\varepsilon_1\alpha_1+\ldots+$$

$$\left.+\varepsilon_{2p}\alpha_{2p}+\alpha_{2p+1}-\alpha_{2p+2})\right] = \frac{(-1)^{p+1}}{2^{2p+1}}\sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2p+2})\in\mathcal{E}_{2p+2}}(-1)^K\cdot$$

$$\cdot\cos(\varepsilon_1\alpha_1+\ldots+\varepsilon_{2p+2}\alpha_{2p+2}).$$

....

(On peut démontrer simplement les relations :

$$\mathscr{C}_{m+1} = \{ (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, -1), (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, 1) \mid (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \in \mathscr{C}_m \}$$ et

$$\mathscr{C}_{m+2} = \{ (\varepsilon_1, \dots \varepsilon_m, -1, -1), (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, -1, 1), (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, 1, -1), (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, 1, 1) \text{ tels que } (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \in \mathscr{C}_m \}.$$

On peut aussi généraliser .)

2) b) Première méthode : par raisonnement par récurrence pour $p \in \mathbb{N}^*$ (comme les questions antérieures).

Deuxième méthode :

$$(\sin \alpha_1 \dots \sin \alpha_{2p}) \sin \alpha_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{2^{2p-1}} \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2p}) \in \mathscr{C}_{2p}} (-1)^K \cdot \cos(\varepsilon_1 \alpha_1 + \dots + \varepsilon_{2p} \alpha_{2p}) \sin \alpha_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2p}) \in \mathscr{C}_{2p}} (-1)^K [\sin(\varepsilon_1 \alpha_1 + \dots + \varepsilon_{2p} \alpha_{2p} + \alpha_{2p+1}) + \sin(\varepsilon_1 \alpha_1 + \dots + \varepsilon_{2p} \alpha_{2p} - \alpha_{2p+1})] = \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2p+1}) \in \mathscr{C}_{2p+1}} (-1)^K \cdot \sin(\varepsilon_1 \alpha_1 + \dots + \varepsilon_{2p+1} \alpha_{2p+1}).$$

4.20. Soit $P(x) = 2x^2 - 1$.

Démontrer que pour $n \geqslant 2$:

$$\sin 2^n x = 2^{n-1} \cdot \sin 2x \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \underbrace{p(\dots p(p}_{i \text{ fois}}(\cos x))\dots).$$

SOLUTION:

a) On va démontrer par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$\sin 2^n x = 2^n \sin x \cos x \cos 2^1 x \cos 2^2 x \dots \cos 2^{n-1} x$; (1)

Dans le cas $n = 1$, c'est évident.

Supposons l'égalité vraie pour n, on démontre qu'elle est vraie aussi pour $n + 1$.

$\sin 2 \cdot 2^n x = 2 \sin 2^n x \cos 2^n x = 2^{n+1} \sin x \cos x \dots \cos 2^{n-1} x . \cos 2^n x$

(on a utilisé l'hypothèse de récurrence).

b) On va démontrer par récurrence que pour $i \in \mathbb{N}^*$ on a :

$\cos 2^i x = p(\dots p(p(\cos x))\dots)$; (2)

Le cas $i = 1$ on a $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = p(\cos x)$

Supposons l'égalité vraie pour i on démontre qu'elle est vraie aussi pour $i + 1$:

$$\cos 2 \cdot 2^i x = 2\cos^2 2^i x - 1 = p(\cos 2^i x) =$$

$$= p(\underbrace{p(\dots p(p}_{i \text{ fois}}(\cos x))\dots))$$

En reportant (2) dans (1) pour tout $\cos 2^i x$, il va en résulter l'égalité cherchée.

1.36. Soient $s,n \in \mathbb{N}^*$, les rationnels K_i, P_i avec $1 \leq i \leq n$, et les fonctions continues $f_i, g_i : \mathbb{R}^S \longrightarrow \mathbb{R}$, aussi $1 \leq i \leq n$.

a) Déterminer un procédé de résolution pour l'équation :

$$\sin^{K_1} f_1(x_1,\ldots,x_s) \cos^{P_1} g_1(x_1,\ldots,x_s) + \ldots + \sin^{K_n} f_n(x_1,\ldots,x_s) \cdot \cos^{P_n} g_n(x_1,\ldots,x_s) = n.$$

b) Trouver une condition nécessaire et suffisante telle que l'équation antérieure soit équivalente au système d'équations :

$$\begin{cases} \sin^{K_1} f_1(x_1,\ldots,x_s) + \ldots + \sin^{K_n} f_n(x_1,\ldots,x_s) = n \\ \cos^{P_1} g_1(x_1,\ldots,x_s) + \ldots + \cos^{P_n} g_n(x_1,\ldots,x_s) = n. \end{cases}$$

SOLUTION:

a) Le membre droit de l'équation est une somme de n termes, chacun $\in [-1,1]$. Donc chaque terme doit être égal à 1, puisque sinon on a $S < n$. D'où, l'équation est équivalente au système :

$$\sin^{K_i} f_i(x_1,\ldots,x_s) \cos^{P_i} g_i(x_1,\ldots,x_s) = 1,\ i \in \{1,\ldots,n\},$$

qui est équivalent à

$$(1) \begin{cases} \sin^{K_i} f_i(x_1,\ldots,x_s) = 1 \\ \cos^{P_i} g_i(x_1,\ldots,x_s) = 1 \end{cases} (1') \text{ ou } \begin{cases} \sin^{K_i} f_i(x_1,\ldots,x_s) = -1 \\ \cos^{P_i} g_i(x_1,\ldots,x_s) = -1 \end{cases} (1'')$$

avec $i \in \{1,\ldots,n\}$;

qui sera résolu normalement; on obtient ensuite un système algébrique.

b) Le système de b) est de même équivalent au système de (1'). Pour que l'équation de a) soit équivalente au système de b), c'est-à-dire à (1'), il faut éliminer le cas (1''). Donc, si $K_i = \frac{r_i}{t_i}$, $P_i \frac{U_i}{V_i}$, r_i, t_i, U_i, V_i sont des entiers, $1 \leq i \leq n$, alors il faut que :

$\forall i \in \{1,\ldots,n\}$, il existe au moins un entier de $\{r_i, t_i, U_i, V_i\}$ qui soit pair.

G E O M E T R I E

5.31. On trace les projections M_i d'un point M sur les côtés $A_i A_{i+1}$ du polygone $A_1 \ldots A_n$. Montrer que :

$$\| M_1 A_1 \|^2 + \ldots + \| M_n A_n \|^2 = \| M_1 A_2 \|^2 + \ldots + \| M_{n-1} A_n \|^2 + \| M_n A_1 \|^2 .$$

SOLUTION:

Pour tout i on a :

$$\| MM_i \|^2 = \| MA_i \|^2 - \| A_i M_i \|^2 = \| MA_{i+1} \|^2 - \| A_{i+1} M_i \|^2$$

Il en résulte que :

$$\| M_i A_i \|^2 - \| M_i A_{i+1} \|^2 = \| MA_i \|^2 - \| MA_{i+1} \|^2 .$$ D'où :

$$\sum_i \left(\| M_i A_i \|^2 - \| M_i A_{i+1} \|^2 \right) =$$

$$= \sum_i \left(\| MA_i \|^2 - \| MA_{i+1} \|^2 \right) = 0.$$

5.32. Sur une droite se trouvent les points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dans cet ordre.

Soit $n_1 = \left[\frac{n}{2}\right]$ et $n_2 = \left[\frac{n+1}{2}\right]$. Démontrer que

$$\sum_{i=1}^{n_2} \| A_i A_{n_1+i} \| = \sum_{j=1}^{n_1} \| A_j A_{n+1-j} \| .$$

SOLUTION:

a) $n = 2K \implies n_1 = n_2 = K$.

Notons $\| A_i A_{i+1} \| = x_i$, $1 \leq i \leq n-1$. (1)

La relation de l'énoncé devient : $\sum_{i=1}^{K} \| A_i A_{K+i} \| = \sum_{i=1}^{K} \| A_i A_{2K+1-i} \|$.

De (1) on a : $\sum_{i=1}^{K} (x_i + x_{i+1} + \ldots + x_{i+K}) = \sum_{i=1}^{K} (x_i + x_{i+1} + \ldots +$
$+ x_{2K-i})$

Le membre de gauche est égal à

$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_K +$
$x_2 + x_3 + \ldots + x_K + x_{K+1}$
. . . .
$x_K + x_{K+1} + \ldots + x_{2k-1}$

qui est égal à $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + Kx_K + (K-1)\, x_{K+1} + (K-2)\, x_{K+2} + \ldots +$
$+ x_{2K-1}$. (2)

Le membre de droite est égal à

$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_K + x_{K+1} + \ldots + x_{2K-2} + x_{2K-1} +$
$x_2 + x_3 + \ldots + x_K + x_{K+1} + \ldots + x_{2K-2} +$
. . . .
$+ x_K$

qui est égal aussi à (2).

b) $n = 2K + 1 \implies n_1 = K$ et $n_2 + K + 1$. La démonstration est la même.

5.33. Soit ABC un triangle quelconque et O le centre du cercle inscrit dans ce triangle. Sur le côté BC on prend n points $A_1, \dots, A_n$, dans cet ordre, tels que les droites $AA_1, \dots, AA_n$ partagent l'angle BAC en $n+1$ parties égales. On procède de manière analogue pour les côtes CA et AB sur lesquels on prend les points $B_1, \dots, B_n$, respectivement $C_1, \dots, C_n$. Montrer que le point O appartient à la figure géomètrique déterminée par l'intersection des droites AA_i, BB_i, CC_i, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

SOLUTION:

a) Si $\frac{n+1}{2} = \left[\frac{n+1}{2} \right] = i$, alors AA_i, BB_i et CC_i sont les bissectrices des angles A, B et C parce qu'elles partagent les angles en deux parties égales. Donc O est l'intersection de celles-ci.

b) Si $\frac{n+1}{2} \neq i$, alors AA_i, BB_i, CC_i ne sont pas des bissectrices. Elles se coupent deux à deux formant un triangle qui se trouve à l'intérieur du triangle ABC. On obtient le petit triangle de la figure (1).

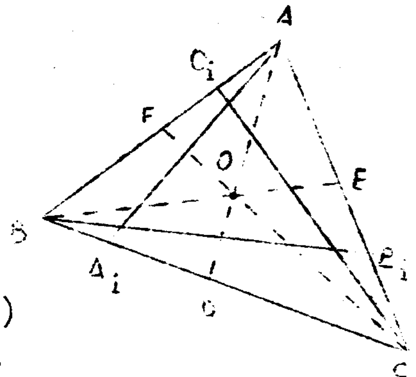


Figure (1).

Soient AD, BE, CF les bissectrices des angles $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$. Celles-ci peuvent être à gauche des droites AA_i, BB_i, CC_i (en regardant les droites comme partant de A vers A_i etc.) ou à droite. Sur la figure (1) on a le cas où les droites se trouvent à gauche. On aura la même démonstration pour l'autre cas.)

Parce que AD se trouve à gauche de AA_i et que $O \in AD$, il en résulte que $O \in \triangle AA_iC$. Parce que BE se trouve à gauche de BB_i et que $O \in BE$ on a $O \in \triangle BB_iA$. De même, $O \in \triangle CC_iB$. D'où $O \in \triangle AA_iC \cap \triangle BB_iA \cap \cap \triangle CC_iB$.

5.34. On donne n droites sécantes deux à deux et non coplanaires trois à trois. Alors toutes ces droites passent par le même point.

SOLUTION:

On considère le cas $n = 3$.

Les droites d_1 et d_2 sont sécantes en M; d_3 coupe d_1 en M' et d_2 en M'' . Si $M' \neq M$ et $M'' \neq M$, alors les trois droites sont coplanaires. Absurde. Donc $M' \equiv M'' \equiv M$.

Le cas $n > 3$ se réduit au cas antérieur.

Parmi les n droites on en prend 3 quelconques, qui satisferont la conclusion. Parmi ces trois droites on en prend 2 quelconques et une autre parmi les $n - 3$ droites restées. On obtient ainsi trois droites qui passent par un même point, qui est aussi M.

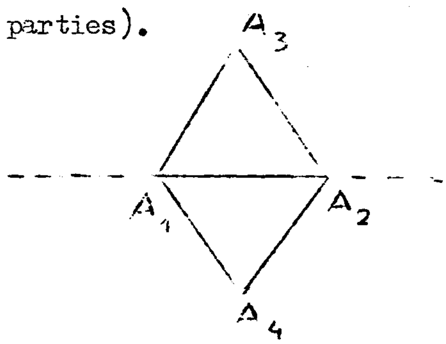
Et le procédé continue jusqu'à ce qu'on épuise toutes les droites.

5.35. Soient n points $A_1, \dots, A_n$ dans un plan, $n \geqslant m \geqslant 3$, tels que m points quelconques d'entre eux forment un polygone régulier. Montrer que $n = m$.

SOLUTION:

1) Le cas $m > 3$. Soient $m - 1$ points dans le plan. On ajoute un point nouveau et on constitue un polygone régulier de m côtés. Chaque polygone régulier s'inscrit dans un cercle. On peut considérer au début que les $m - 1$ points se trouvent sur la circonférence d'un cercle. Evidemment, l'autre point (qui est ajouté) se trouve sur le même cercle, et il est bien déterminé, puisque le cercle est divisé en des arcs égaux. Mais, par les $m - 1 \geqslant 3$ points passe seulement un seul cercle. Donc à $m - 1$ points on peut ajouter un seul point pour former un polygone régulier (de m côtés). Ainsi que, le nombre de points qui ont la propriété de l'énoncé ne peut pas dépasser m ; mais, aussi, il ne peut pas être inférieur à m parce qu'on ne peut pas former un polygone de m côtés. D'où $n = m$.

2) Le cos $m = 3$. Alors $m - 1 = 2$. Ayant deux points distincts, pour former un triangle équilatéral, nous pouvons trouver : soit un point dans un demi-plan, soit un point dans l'autre demi-plan (les demi-plans déterminés par la droite qui unit les deux points et partage le plan en deux parties).



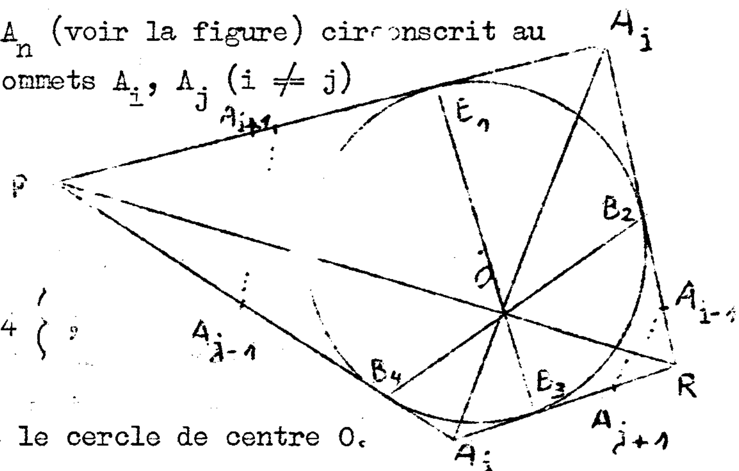
Si $\Delta A_1A_2A_3$ et $\Delta A_1A_2A_4$ sont équilatéraux, alors $\Delta A_1A_3A_4$ n'est pas équilatéral. Et la démonstration est analogue au cos 1).

5.36. On considère un polygone (qui a au moins 4 côtés) circonscrit à un cercle, et D l'ensemble des diagonales et des droites qui joignent les points de contact de deux côtés non adjacents. Alors D contient au moins 3 droites concourantes.

SOLUTION:

Soit n le nombre des côtés. Si $n = 4$, alors les deux diagonales et les deux droites qui joignent les points de contact de deux côtés non adjacents sont concourantes (conformément au théorème de Newton).

Le cas $n > 4$ se ramène au cas antérieur : on considère le polygone quelconque $A_1 \dots A_n$ (voir la figure) circonscrit au cercle et on choisit deux sommets A_i, A_j $(i \neq j)$ tels que



$A_jA_{j-1} \cap A_iA_{i+1} = P$

et $A_jA_{j+1} \cap A_iA_{i-1} = R$.

Soient B_h, $h \in \{1, 2, 3, 4\}$, les points de contact du quadrilatère PA_jRA_i avec le cercle de centre O.

Grâce au théorème de Newton, les droites A_iA_j, B_1B_3 et B_2B_4 sont concourantes.

5.37. Dans un triangle ABC soient les céviennes AA', BB' et CC' qui se coupent en P. Calculer la valeur minimum des l'expressions:

$$E(P) = \frac{\|AP\|}{\|PA'\|} + \frac{\|BP\|}{\|PB'\|} + \frac{\|CP\|}{\|PC'\|}, \text{ et } F(P) = \frac{\|AP\|}{\|PA'\|}\cdot\frac{\|BP\|}{\|PB'\|}\cdot\frac{\|CP\|}{\|PC'\|},$$

où $A' \in [BC]$, $B' \in [CA]$, $C' \in [AB]$.

SOLUTION:

On applique le théorème de Van Aubel trois fois pour le triangle ABC, et il en résulte :

$$(1) \quad \frac{\|AP\|}{\|PA'\|} = \frac{\|AC'\|}{\|C'B\|} + \frac{\|AB'\|}{\|B'C\|}$$

$$(2) \quad \frac{\|BP\|}{\|PB'\|} = \frac{\|BA'\|}{\|A'C\|} + \frac{\|BC'\|}{\|C'A\|}$$

$$(3) \quad \frac{\|CP\|}{\|PC'\|} = \frac{\|CA'\|}{\|A'B\|} + \frac{\|CB'\|}{\|B'A\|}$$

Si on fait l'addition de ces trois relations et qu'on note

$$\frac{\|AC'\|}{\|C'B\|} = X > 0, \quad \frac{\|AB'\|}{\|B'C\|} = y > 0, \quad \frac{\|BA'\|}{\|A'C\|} = Z > 0, \text{ alors}$$

on obtient : $E(P) = (X + \frac{1}{X}) + (y + \frac{1}{y}) + (Z + \frac{1}{Z}) \geqslant 2+2+2 = 6.$

La valeur minimum sera obtenu lorsque $X = y = Z = 1$,

c'est-à-dire que P sera le centre de gravité du triangle.

En multipliant les trois relations on trouve que

$$F(P) = \left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)+\left(\frac{yz}{x}+\frac{x}{yz}\right) \geqslant 8.$$

5.38. Si les points A_1 , B_1 , C_1 divisent les côtés BC, CA, respectivement AB d'un triangle dans le rapport K, déterminer le minimum de l'expression : $\|AA_1\|^2 + \|BB_1\|^2 + \|CC_1\|^2$.

SOLUTION:

On suppose $K > 0$ parce qu'on travaille avec des distances.

$$\|BA_1\| = K\,\|BC\| \; ; \quad \|CB_1\| = K\,\|CA\| \quad ; \; \|AC_1\| = K\,\|AB\| \, .$$

On applique trois fois le théorème de Stewart dans le triangle ABC, avec les segments AA_1 BB_1 , respectivement CC_1 :

$$\|AB\|^2 \cdot \|BC\|(1-K) + \|AC\|^2 \cdot \|BC\| \cdot K - \|AA_1\|^2 \cdot \|BC\| = \|BC\|^3(1-K)K$$

ou : (1) $\|AA_1\|^2 = (1-K)\,\|AB\|^2 + K\,\|AC\|^2 - (1-K)\,K\,\|BC\|^2$

Analogiquement :

(2) $\|BB_1\|^2 = (1-K)\,\|BC\|^2 + K\,\|BA\|^2 - (1-K)\,K\,\|AC\|^2$

(3) $\|CC_1\|^2 = (1-K)\,\|CA\|^2 + K\,\|CB\|^2 - (1-K)\,K\,\|AB\|^2$

Par l'addition des ces trois égalités on trouve :

$$\|AA_1\|^2 + \|BB_1\|^2 + \|CC_1\|^2 = (K^2-K+1)\,(\|AB\|^2 + \|BC\|^2 + \|CA\|^2),$$

qui prend la valeur minimum lorsque $K = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire le cas où les trois droites de l'énoncé sont les médianes du triangle.

Le minimum est $\frac{3}{4}\,(\|AB\|^2 + \|BC\|^2 + \|CA\|^2)$.

§ 39. Dans le triangle ABC nous traçons les lignes AA_1, BB_1, CC_1 concurrentes tell que $AB_1^2 + B_1C^2 + C_1A^2 = AB_1^2 + BC_1^2 + C_1A^2$ et l'une d'elles est la médiane.

Démontrez que les deux autres lignes sont également médianes ou le triangle ABC est isocèle.

Solution.

Nous supposons que AA_1 est la médiane sans diminuer la généralité du problème, donc $A_1B = A_1C$, et de la relation dans l'hypothèse il en résulte:

$$B_1C^2 + C_1A^2 = AB_1^2 + BC_1^2 \qquad (1)$$

De la concurrence des lignes AA_1, BB_1, CC_1 et le Théorème de Menelaus il en résulte que:

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AC_1}{C_1B} \qquad (2)$$

Nous faisons la notation $\frac{AB_1}{B_1C} = k,\ \ k > 0$; d'où nous avons:

$$B_1C^2 + k^2C_1B^2 = k^2B_1C^2 + BC_1^2 .$$

Par conséquence $\left(k^2 - 1\right)\left(C_1B^2 - B_1C^2\right) = 0$, et d'ici nous trouvons $k = 1$ ou $C_1B = B_1C$.

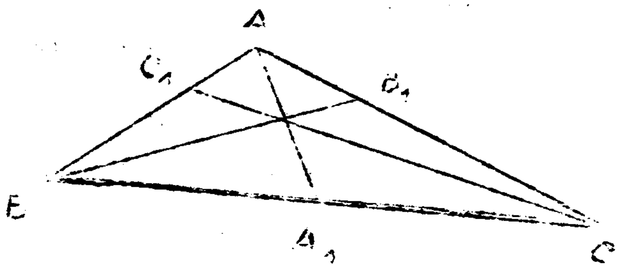
Si $k = 1$ alors $AB_1 = B_1C$ et $AC_1 = C_1B$ donc par conséquence BB_1 et CC_1 sont médianes.

Si $C_1B = B_1C$ de (2) il en résulte que $AB_1 = AC_1$ et par conséquence $AB = AC$, et le triangle ABC est donc isocèle.

5.41. Dans un triangle on trace les céviennes AA_1 , BB_1 et CC_1 sécantes en P. Montrer que

$$\frac{PA}{PA_1} \cdot \frac{PB}{PB_1} \cdot \frac{PC}{PC_1} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A}.$$

SOLUTION:



Dans le triangle ABC on applique le théorème de Céva :

(1) $AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = - AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1$

Dans le $\triangle\ AA_1B$, coupé par la transversale CC_1 , on applique le théorème de Ménélaus :

(2) $AC_1 \cdot BC \cdot A_1P = AP \cdot A_1C \cdot BC_1$

Dans le $\triangle\ BB_1C$, coupé par la transversale AA_1 , on applique aussi le théorème de Ménélaus :

(3) $BA_1 \cdot CA \cdot B_1P = BP \cdot B_1A \cdot CA_1$

On applique encore une fois le théorème de Ménélaus dans le $\triangle\ CC_1A$ coupé par la transversale BB_1 :

(4) $AB \cdot C_1P \cdot CB_1 = AB_1 \cdot CP \cdot C_1B$

On divise chaque relation (2), (3) et (4) par la relation (1), et il vient :

(5) $\dfrac{PA}{PA_1} = \dfrac{BC}{BA_1} \cdot \dfrac{B_1A}{B_1C}$

(6) $\dfrac{PB}{PB_1} = \dfrac{CA}{CB_1} \cdot \dfrac{C_1B}{C_1A}$

(7) $\dfrac{PC}{PC_1} = \dfrac{AB}{AC_1} \cdot \dfrac{A_1C}{A_1B}$

On multiplie (5) par (6) et par (7) , et on a :

$$\frac{PA}{PA_1} \cdot \frac{PB}{PB_1} \cdot \frac{PC}{PC_1} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A} \cdot \frac{AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1}{A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A},$$

mais la dernière fraction est égale à 1 conformément au théorème de Céva.

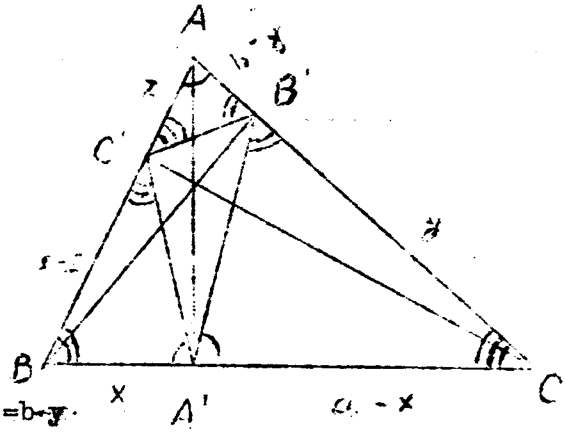
5.41. Soit un triangle ABC qui a tous les angles aigus, et on considère $A'B'C'$, le triangle formé par les pieds de ses hauteurs.

Dans quelles conditions l'expression

$$\|A'B'\| \cdot \|B'C'\| + \|B'C'\| \cdot \|C'A'\| + \|C'A'\| \cdot \|A'B'\|$$

est-elle maximum ?

SOLUTION:



On a

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C \sim \triangle AB'C' \sim \triangle A'BC' \qquad (1)$$

On note

$\|BA'\| = X$, $\|CB'\| = y$, $\|AC'\| = Z$. Il en résulte que $\|A'C\| = a - X$, $\|B'A\| = b - y$, $\|C'B\| = c - Z$.

$\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C} = \widehat{BA'C'}$; $\widehat{ABC} = \widehat{AB'C'} = \widehat{A'B'C}$; $\widehat{BCA} = \widehat{BC'A'} = \widehat{B'C'A}$.

De ces égalités il résulte la relation (1).

$$\triangle A'BC' \sim \triangle A'B'C \Longrightarrow \frac{\|A'C'\|}{a - X} = \frac{X}{\|A'B'\|} \qquad (2)$$

$$\triangle A'BC' \sim \triangle AB'C' \Longrightarrow \frac{\|A'C'\|}{Z} = \frac{c-Z}{\|B'C'\|} \qquad (3)$$

$$\triangle AB'C' \sim \triangle A'B'C \Longrightarrow \frac{\|B'C'\|}{y} = \frac{b-y}{\|A'B'\|} \qquad (4)$$

De (2), (3) et (4) on tire que la somme des produits de l'énoncé est égale à :

$$X(a - X) + y(b - y) + Z(c - Z) = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2) - (X - \frac{a}{2})^2 - (y - \frac{b}{2})^2 - (Z - \frac{c}{2})^2$$

qui atteint son maximum lorsque $X = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$, $Z = \frac{c}{2}$ c'est-à-dire que les hauteurs tombent au milieu des côtés, donc lorsque $\triangle ABC$ est équilatéral. Le maximum de l'expression est $\frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

5.42. Soient n points distincts $A_1, \ldots, A_n$ sur la circonférence d'un cercle de centre O et de rayon R.

Montrer qu'il existe deux points A_i et A_j tels que $\|\vec{OA_i} + \vec{OA_j}\| \geqslant$

$\geqslant 2R \cos \dfrac{180°}{n}$.

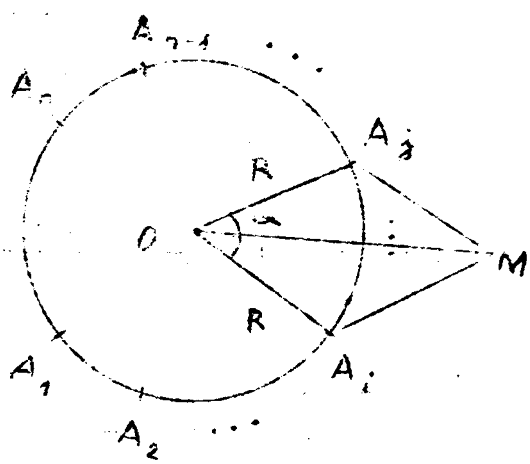
SOLUTION:

Comme $S = \sphericalangle A_1 OA_2 + \sphericalangle A_2 OA_3 + \ldots + \sphericalangle A_{n-1} OA_n + \sphericalangle A_n OA_1 =$

$= 360°$ et que $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $\sphericalangle A_i OA_{i+1} > 0°$,

il en résulte qu'il existe au moins un angle

$\sphericalangle A_i OA_j \leqslant \dfrac{360°}{n}$ (sinon il en résulterait que $S > \dfrac{360°}{n} \cdot n =$
$= 360°$)



$\vec{OA_i} + \vec{OA_j} = \vec{OM} \Longrightarrow$

$\|\vec{OA_i} + \vec{OA_j}\| = \|\vec{OM}\|$.

Le quadrilatère

$OA_i MA_j$ est un rhombe.

Lorsque α est plus petit,

$\|\vec{OM}\|$ est plus grand.

Comme $\alpha \leqslant \dfrac{360°}{n}$,

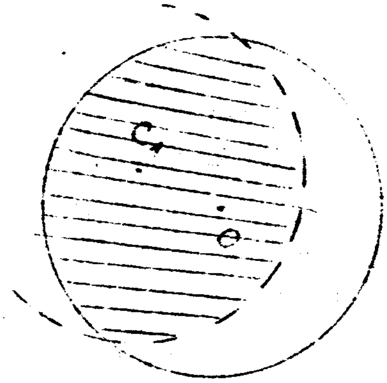
il en résulte que :

$\|\vec{OM}\| = 2 R \cos \dfrac{\alpha}{2} \geqslant 2 R \cos \dfrac{180°}{n}$.

5.43. Déterminer le nombre maximum de points qui se trouvent dans un cercle ou sur sa circonférence, tels que la distance entre deux quelconques des points soit supérieure ou égale au rayon.

SOLUTION:
Le côté d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle a la même dimension que le rayon du cercle respectif. D'où il existe au moins 7 points dans un cercle qui ont la propriété de l'énoncé : un point dans le centre du cercle, et 6 points sur la circonférence du cercle tels que les six points constituent les sommets d'un hexagone régulier inscrit dans ce cercle.

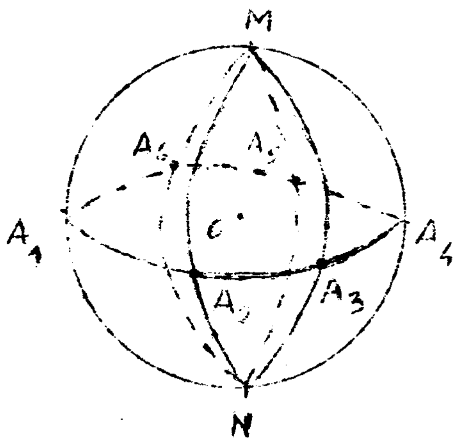
Les 7 points choisis sont pris d'une manière optimale. Par exemple, si l'on essaye de construire l'ensemble de points qui ont la propriété de l'énoncé du problème, il ne serait pas du tout optimal de prendre le premier point différent du centre du cercle ni sur la circonférence.



Ainsi, dans la figure géométrique ci-jointe, en prenant C_1 dans l'intérieur du cercle et différent du centre, alors dans la portion hachurée (qui est un cercle de même rayon que le cercle initial, et de centre C_1, coupé par celui-ci) on ne peut plus prendre aucun point. Donc le mieux est d'avoir la portion hachurée la plus petite. Il en résulte que C_1 doit être sur la circonférence. D'où cela implique que les autres point seront : 5 sur la circonférence tels que les 6 points vont constituer un hexagone régulier et l'autre dans le centre du cercle. Ainsi on a construit 7 points.

5.44. Combien de points se trouvent dans une sphère (et sur sa surface), tels que la distance entre deux quelconques d'entre eux soit supérieure ou égale au rayon ?

SOLUTION:



On considère l'un des grands cercles de la sphère, déterminé par le plan $A_1 OA_4$, où O est le centre de la sphère. Sur la circonférence de celui-ci on prend les points $A_1, A_2, \dots, A_6$ tels qu'ils constituent un hexagone régulier - donc, la distance $\| A_i A_j \| \geq$ au rayon de la sphère, pour $i \neq j$. On construit un plan $A_2 A_5$ MNO perpendiculaire au plan $A_1 OA_4$ qui coupe la sphère d'après le cercle $A_2 A_5$ MN. Sur la circonférence de celui-ci on prend aussi 6 points qui constituent un hexagone régulier, parmi lesquels seront A_2 et A_5. Puis, on trace le troisième grand cercle de la sphère, déterminé par A_3 , A_6 , M et N. Aussi, sur la circonférence de ce dernier cerlce on prend 6 points, les sommets d'un hexagone régulier, parmi lesquels A_3 et A_6 . Etc.
On a en tout 6 + 4 + 0 = 10 points, et si on ajoute le centre de la sphère on obtient 11 points qui gardent la propriété de l'énoncé.

Cette façon de construire les points est optimale. Si on commence la construction des points, par exemple en prenant un point A qui n'appartient pas à la surface de la sphère et qui est différent du centre de la sphère, alors la sphère de centre A et de même rayon va occuper une grande zone dans la sphère initiale, mais le but est que cette zone soit la plus petite possible. D'où A appartient à la surface. Et la démonstration continue de même.

5.45. Soient n points distincts dans un plan, reliés deux à deux par une droite;

a) Quel est le nombre maximum de droites que l'on pourrait construire avec ces points ?

b) si m points seulement, $1 \leq m < n$, sont colinéaires, combien de droites distinctes a-t-on ?

c) montrer qu'on ne peut pas avoir $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ droites, quelle que soit la façon dont on arrange les n points distincts.

SOLUTION:

Soient $A_1, \ldots, A_n$ les n points distincts.

a) Si ceux-ci sont trois à trois non colinéaires, alors on peut former toutes les droites possibles :

$A_i A_j$ avec $i < j$ et $(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$. Donc $\frac{n(n-1)}{2}$ droites.

b) Si $A_1, \ldots, A_m$ sont colinéaires, alors les droites $A_h A_k$ avec $h < k$ et $(h, k) \in \{1, \ldots, m\}^2$ sont les mêmes, et constituent une seule droite. Alors il reste :

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} + 1 = \frac{n^2 - m^2 - n + m + 2}{2}$$ droites distinctes.

c) $\frac{(n-2)(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} - 1$

Si les n points sont trois à trois non colinéaires, on a vu qu'on a $\frac{n(n-1)}{2}$ droites distinctes. Si m points sont colinéaires, on a $\frac{m(m-1)}{2} - 1$ droites en moins.
Mais $\frac{m(m-1)}{2} - 1 = 1 \iff m^2 - m - 4 = 0$ qui n'admet pas de solution naturelle.
Par exemple, si on a 3 points colinéaires, on élimine 2 droites du total de $\frac{n(n-1)}{2}$, mais pas une droite comme il faudrait.

5.47. Soient n points distincts dans le plan, trois à trois non colinéaires $A_1,\dots,A_n$. Trouver le lieu géométrique des points $M \neq A_i$, $1 \leq i \leq n$, tel que n'importe quelle droite qui passe par M et qui ne contient aucun point A_i $(1 \leq i \leq n)$ divise le plan en deux demi-plans qui contiennent l'un $\left[\frac{n}{2}\right]$ et l'autre $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ points.

SOLUTION:

Notons Π le plan qui contient les points $A_1,\dots,A_n$ et soit α le lieu géométrique cherché.

1) Si n = 1, alors bien sûr $\alpha = \Pi - \{A_1\}$.

2) Si n = 2, $\alpha = [A_1, A_2] - \{A_1, A_2\}$, où $[A_1, A_2]$ représente le segment de droite qui unit les points A_1 et A_2.

3) $n > 2$.

a) n = 2K. Soit d_1 la droite qui passe par A_1 et par un point A_{s_1}, $2 \leq s_1 \leq n$, telle que d'un côté et de l'autre de la droite d_1 se trouvent K - 1 d'entre les points $A_2,\dots,A_{s_1-1}, A_{s_1+1},\dots,A_n$.

On a $\left[\frac{2K}{2}\right] = \left[\frac{2K+1}{2}\right] = K$. Evidemment α est inclus dans $[A_1, A_{s_1}]$. On procède ainsi pour tous les points A_i, $1 \leq i \leq n$, et on trouve que $\alpha = \bigcap_{i=1}^{n} [A_i, A_{s_i}]$. Donc, si tous ces segments se coupent en un point, alors celui-ci sera α ; sinon $\alpha = \emptyset$.

b) n = 2K + 1; On a $\left[\frac{n}{2}\right] = K$ et $\left[\frac{n+1}{2}\right] = K + 1$.

Pour A_1 construisons le triangle $A_1 A_{u_1} A_{v_1}$, où A_{u_1} est tel que la droite $A_1 A_{u_1}$ partage le plan en deux demi-plans, l'un contenant K - 1, l'autre K points d'entre les points A_i restés; cependant que A_{v_1} est tel que la droite $A_1 A_{v_1}$ partage aussi le plan en deux demi-plans, l'un contenant K et l'autre K - 1 points d'entre les points A_i restés. Evidemment $\alpha \subseteq \Delta A_1 A_{u_1} A_{v_1}$. On procède de même pour tous les points A_i, $1 \leq i \leq n$, et on trouve que $\alpha = \bigcap_{i=1}^{n} \Delta A_i A_{u_i} A_{v_i}$.

5.48. Montrer qu'une sphère ne peut pas être incluse dans l'union de deux sphères de rayons strictement inférieurs au sien.

SOLUTION:

Soit S la sphère, C son grand cercle, r le rayon de la sphère (implicitement r est le rayon du cercle C).

Par l'absurde, soient S_1 et S_2 les sphères qui comprennent cette sphère et telles que celles-ci sont strictement inférieures à S.

On note C_1 (respectivement C_2) le grand cercle de la S_1 (respectivement S_2) et r_1 (respectivement r_2) le rayon de la sphère S_1 (respectivement S_2) {implicitement r_1 (respectivement r_2), est le rayon du cercle C_1 (respectivement C_2)} .

On fait l'intersection entre S et S_1 .

a) $S \cap S_1 = \{ P \}$ (un seul point commun)

Soit O le centre de la sphère S. Construisons un plan Π qui contient le rayon OP.

$\Pi \cap S = C$, $C \cap S_1 = \{ P \}$. Donc $S_2 \supset C - \{ P \}$, c'est-à-dire $r_2 \geqslant r$. Contradiction.

b) $S \cap S_1 = C_{SS_1}$ (un cercle). Il en résulte que le rayon de celui-ci $r_{C_{SS_1}} \leqslant \min \{ r_1, r \} = r_1 < r$.

Alors il existera un grand cercle C de la sphère S qui a la propriété que $C \cap S_1 = \emptyset$. Donc $S_2 \supset C$, et $r_2 \geqslant r$, ce qui est absurde.

c) Le cas $S_1 \subset S$ et la surface de S_1 ne coupe pas la surface de S, alors il existera un grand cercle C de la sphère S tel que $C \cap S_1 = \emptyset$. Donc $S_2 \supset C$, et alors $r_2 \geqslant r$, ce qui est aussi absurde.

d) Même démonstration lorsque $S \cap S_1 = \emptyset$ et $S_1 \not\subset S$.

6.5. On considère les nombres naturels $K_1, \dots, K_p$ qui constituent une suite arithmétique. Montrer que si $a_1, \dots, a_n$ constituent une suite arithmétique (respectivement géométrique) alors $a_{K_1}, \dots, a_{K_n}$ constituent une suite arithmétique (respectivement géométrique).

SOLUTION :

$K_i = K_1 + (i-1)\, r_1$, $1 \leq i \leq p$, et r_1 est la raison de cette suite arithmétique.

a) Lorsque $a_1, \dots, a_n$ constituent une suite arithmétique, alors $a_{K_i} = a_{K_1} + (K_i - K_1)\, r = a_{K_1} + r r_1 (i-1)$, où $1 \leq i \leq p$ et r est la raison de la suite $a_1, \dots, a_n$.

Donc $a_{K_1}, \dots, a_{K_p}$ constituent aussi une suite arithmétique de raison $r \cdot r_1$.

b) Lorsque $a_1, \dots, a_n$ constituent une suite géométrique, de raison q , alors $a_{K_i} = a_{K_1} \cdot q^{K_i - K_1} = a_{K_1} \cdot (q^{r_1})^{i-1}$ où $1 \leq i \leq p$. Donc $a_{K_1}, \dots, a_{K_p}$ constituent une suite géométrique de raison q^{r_1}.

4.54. Soient les suites de naturels X_n et Y_n telles que $X_n = aY_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, et $a \neq 1$. De la progression arithmétique $b_1, b_2, \ldots$ on élimine les termes de rang X_n, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que parmi les termes restés il existe une sous-progression arithmétique.

SOLUTION:

On observe que si les naturels $i_1, \ldots, i_s$ constituent une progression arithmétique alors $b_{i_1}, \ldots, b_{i_s}$ ont la même propriété, puisque :

$$2b_{i_j} = 2\left[b_1 + (i_j - 1) r\right] = 2b_1 + (2i_j - 2) r = 2b_1 + (i_{j-1} +$$
$$+ i_{j+1} - 2) r = (b_1 + (i_{j-1} - 1) r) + (b_1 + (i_{j+1} - 1) r) =$$
$$= b_{i_{j-1}} + b_{i_{j+1}}$$

(On a utilisé $2i_j = i_{j-1} + i_{j+1}$).

Donc, on peut remplacer $b_1, b_2, \ldots$ par $1, 2, \ldots$

Il faut construire une progression arithmétique $a_1, a_2, \ldots$ telle que $a_{i+1} \neq X_n$, $\forall (i, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

A) Le cas $a = 0$ est trivial.

B) Soit $a \neq 0$.

$a_{i+1} = a_1 + i \cdot r$, où r est la raison. Donc $a_1 = ?$, $r = ?$ tels que $a_1 + ir \neq a \cdot Y_n$, $\forall (i, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. (1)

D'où $i \neq \dfrac{a \cdot Y_n - a_1}{r}$. Parce que $i \in \mathbb{N}$, on pose la condition :

$$(aY_n - a_1) \cdot \frac{1}{r} \notin \mathbb{Z}.$$

On prend $r = a \geq 2$ (parce que $a \neq 0$, $a \neq 1$ et X_n et Y_n sont des suites naturelles, d'où $a \in \mathbb{N}$) et $a_1 = a - 1$.

Ainsi $i \neq \dfrac{aY_n - a + 1}{a} = Y_n - 1 + \dfrac{1}{a} \notin \mathbb{N}$ et la relation (1) est vérifiée.

6.52. Montrer que $(f_1 \circ \dots \circ f_n)' = \prod_{i=1}^{n} f'_i \circ f_{i+1} \circ \dots \circ f_n$.

SOLUTION:

Pour i = 1 on a immédiatement le résultat.

Supposons l'égalité vraie pour i = n - 1. Alors

$$(f_1 \circ \dots \circ f_n)' = (f_1 \circ (f_2 \circ \dots \circ f_n))' = (f'_1 \circ (f_2 \circ \dots \circ f_n))\cdot$$

$$\cdot (f_2 \circ \dots \circ f_n)' = (f'_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n)\cdot \prod_{i=2}^{n} (f'_i \circ f_{i+1} \circ \dots \circ f_n) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f'_i \circ f_{i+1} \circ \dots \circ f_n \, .$$

1.57. Soient les ensembles $\emptyset \neq A \subset M_1 \subset M_2$, où M_1 est partout dense dans M_2, et $\inf A = \alpha$ dans M_2.

Alors : il existe inf A dans M_1 si et seulement si $\alpha \in M_1$.

Même question avec sup A.

SOLUTION:

Suffisance.

Si $\inf A = \alpha$ dans M_2 et $\alpha \in M_1 \subset M_2$, alors evidemment $\inf A = \alpha$ dans M_1.

Nécessité.

Soit $\alpha' = \inf A$ dans M_1. Donc $\alpha' \in M_1$.

On sait que $\inf A = \alpha$ dans M_2 par hypothèse.

1) Si $\alpha' > \alpha$, alors $\inf A = \alpha' \neq \alpha$ dans M_2. Contradiction.

2) Si $\alpha' < \alpha$, parce que M_1 est partout dense dans M_2, il en résulte qu'il existe $\gamma \in M_1$ tel que $\alpha' < \gamma < \alpha$.

Si $\gamma \in A$, alors α n'est pas égal à inf A dans M_2 (contradiction) ; donc $\gamma \notin A$.

S'il existe $\gamma' \in (\alpha', \gamma)$ tel que $\gamma' \in A$, alors $\alpha \neq \inf A$ dans M_2. Contradiction.

S'il n'existe pas $\gamma' \in (\alpha', \gamma)$ tel que $\gamma' \in A$, alors $\alpha' \neq \inf A$ dans M_1. Contradiction.

Donc :

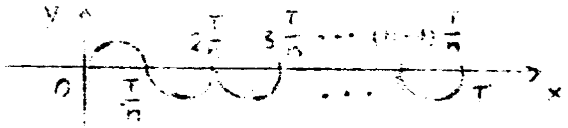
3) $\alpha' = \alpha$, c'ést-à-dire $\alpha \in M_1$

Démonstration analogue pour sup A.

6.54. Montrer que, quels que soient le naturel $n > 0$ et le réel $T > 0$, il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de période T et telle que $|f|$ a la période $\frac{T}{n}$. Dans ce cas, si f est continue, démontrer que f s'annule au moins en $n-1$ points dans un intervalle de longueur T.

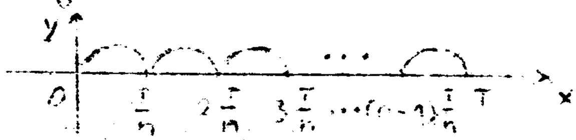
SOLUTION :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $T \in \mathbb{R}_+^*$ et la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de période T, qui a la représentation graphique suivante :

(1) 

où tous les n demi-cercles de (1) sont égaux entre eux.

La fonction $|f| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aura la courbe suivante :

(2) 

donc la période de celle-ci est $\frac{T}{n}$.

Evidemment, il existe une infinité de telles fonctions, parce qu'on peut remplacer les demi-cercles de (1) par d'autres courbes telles que la propriété de l'énoncé soit conservée.

Nous devons montrer le deuxième point :

Le cas $n = 1$ est banal. Soit $n > 1$. Soit K le nombre des points pour lesquels f s'annule dans un intervalle de longueur T. Mais K est non nul, puisqu'autrement il en résulterait que $|f| = f$ ou $|f| = -f$ sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $|f|$ a la période T.

Donc $K \geq 1$. $\quad f(x) = 0 \iff |f|(x) = 0$.

(3) Puisque $|f|(x)$ s'annule au moins une fois (on a $K \geq 1$), il en résulte que $|f|$ s'annule dans un intervalle de longueur $\frac{T}{n}$ ou dans l'intérieur de celui-ci ou à une extrémité de celui-ci.

Mais, dans un intervalle de longueur T on a n intervalles de longueur $\frac{T}{n}$. Donc $|f|$ s'annule au moins $n-1$ fois dans un intervalle de longueur T, et sachant (3) il en résulte la dernière question de problème.

6.56. Soient les fonctions positives $f_1, \dots, f_n$ sur un intervalle I, telles qu'elles varient dans le même sens sur cet intervalle. Alors $f_1 \cdot \ldots \cdot f_n$ varie dans ce même sens sur I.

SOLUTION:

On considère que toutes les f_i sont croissantes. (Démonstration analogue si toutes les f_i sont décroissantes.).

On utilise le raisonnement par récurrence.

Pour i = 2. Soit $X_1 < X_2$.

$$\frac{(f_1 f_2)(x_2) - (f_1 f_2)(x_1)}{x_2 - x_1} = f_1(X_1) \frac{f_2(X_2) - f_2(X_1)}{X_2 - X_1} +$$

$$+ f_2(X_2) \frac{f_1(X_2) - f_1(X_1)}{X_2 - X_1} \geqslant 0.$$

D'où, $f_1 f_2$ est une fonction croissante sur I.

On suppose que $f_1 \cdot \ldots \cdot f_{n-1}$ est croissante, alors $f_1 \cdot \ldots \cdot f_{n-1} \cdot f_n$ est croissante, parce qu'on peut noter $f_1 \cdot \ldots \cdot f_{n-1} = g$ qui est positive et croissante par l'hypothèse de récurrence, et $f_1 \cdot \ldots \cdot f_{n-1} \cdot f_n = g f_n$ qui est croissante conformément à la démonstration pour i = 2.

4.56. Soit n un naturel non nul.

a) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, impaires, dérivables 2 n fois, telles que la dérivée d'ordre 2 n soit non négative.

b) Déterminer les fonctions $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, paires, dérivables 2n − 1 fois, telles que la dérivée d'ordre 2n − 1 soit non négative.

SOLUTION:

a) $f(X) = -f(-X)$; $\forall X \in \mathbb{R}$. Il en résulte que $f^{(2n)}(X) =$
$= (-1)^{2n+1} f^{(2n)}(-X)$.

Mais $f^{(2n)}(X) \geqslant 0$ et $f^{(2n)}(-X) \leqslant 0$, cela implique que $f^{(2n)}(X) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Par l'intégration 2n fois, nous obtenons :

$f(X) = a_{2n-1} X^{2n-1} + a_{2n-2} X^{2n-2} + \dots + a_1 X + a_0$, avec $a_i \in \mathbb{R}$
$0 \leqslant i \leqslant 2n-1$.

Puisque f est impaire, il en résulte :

$a_{2n-1} X^{2n-1} + a_{2n-2} X^{2n-2} + \dots + a_1 X + a_0 \equiv a_{2n-1} X^{2n-1} - a_{2n-2} X^{2n-2} + \dots + (-1)^{i+1} a_i X^i + \dots + a_1 X^1 - a_0$. On obtient $a_{2n-2} = a_{2n-4} = \dots = a_0 = 0$.

Donc $f(X) = a_{2n-1} X^{2n-1} + a_{2n-3} X^{2n-3} + \dots + a_1 X$.

b) $g(X) = g(-X)$, $\forall X \in \mathbb{R}$. Il en résulte que $g^{(2n-1)}(X) =$
$= (-1)^{2n-1} g^{(2n-1)}(-X)$.

$g^{(2n-1)}(X) \geqslant 0$ et $g^{(2n-1)}(-X) \leqslant 0$, cela implique que $g^{(2n-1)}(X)=0$ sur $\mathbb{R}$.

Par l'intégration 2n fois, on a

$g(X) = b_{2n-2} X^{2n-2} + b_{2n-3} X^{2n-3} + \dots + b_1 X + b_0$, avec $b_i \in \mathbb{R}, 0 \leqslant i \leqslant 2n-2$.

Parce que g est paire, il en résulte que :

$b_{2n-2} X^{2n-2} + b_{2n-3} X^{2n-3} + \dots + b_1 X + b_0 \equiv b_{2n-2} X^{2n-2} - b_{2n-3} X^{2n-3} + \dots$
$\dots + (-1)^i b_i X^i + \dots + (-1) b_1 X + b_0$ Nous obtenons $b_{2n-3} = b_{2n-5} = \dots$
$\dots = b_1 = 0$.

Donc $g(X) = b_{2n-2} X^{2n-2} + b_{2n-4} X^{2n-4} + \dots + b_2 X^2 + b_0$.

6.57. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admet un centre de symétrie si et seulement si il existe deux constantes réelles a et b telles que la fonction $g(X) = f(X + a) - b$ soit impaire.
Dans ces conditions, le centre de symétrie a pour coordonnées (a,b).

SOLUTION:

Nécessité.

Soit C (α, β) le centre de symétrie. On pose $a = \alpha$ et $b = \beta$
Faisons une translation des axes, en déplaçant l'origine en C (a,b).
Les formules de changement du repère OXY en CX'Y' sont :

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases} \iff \begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$$

Donc $y = f(x)$ devient $y' + b = f(x' + a)$, ou
$y' = f(x' + a) - b$. Notons $g(x') = f(x' + a) - b$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
La fonction g admet un centre de symétrie, qui est même l'origine des axes. D'où g est impaire.

Suffisance.

g étant impaire, il en résulte que g admet l'origine des axes pour centre de symétrie.
On fait une translation des axes, en déplaçant l'origine en C" (-a,-b).
Ainsi les formules de changement du repère OXY en O" X" Y" sont :

$$\begin{cases} x'' = x + a \\ y'' = y + b \end{cases} \iff \begin{cases} x = x'' - a \\ y = y'' - b \end{cases}$$

Donc $y = g(x) = f(x + a) - b$ devient $y'' - b = f(x'' - a + a) - b$, c'est-à-dire $y'' = f(x'')$.
Comme g admet le centre de symétrie O (o,o) dans le repère OXY, cela implique donc que f admet le centre de symétrie O (a,b) dans le repère O" X" Y".

6.57. Dans un système d'axes orthogonaux, une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet un axe de symétrie si et seulement si il existe une constance réelle a telle que la fonction $g(x) = f(x + a)$, est paire.
Dans ces conditions, l'axe de symétrie a pour équation $x = a$.

SOLUTION:

Nécessité.

Soit $x = \alpha$ l'axe de symétrie de la fonction f. On pose $a = \alpha$.
Faisons une translation des axes, en déplaçant l'origine en $O'(a, o)$.
Les équations de changement du repère (OXY) en (O' X' Y') sont :

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = x' + a \\ y = y' \end{cases}$$

Donc $y = f(x)$ devient $y' = f(x' + a) = g(x')$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
f admet pour axe de symétrie la droite $x = a$. Il en résulte que g admet pour axe de symétrie la droite $x' = o$ (dans O' X' Y'), c'es-à-dire l'axe O' Y'.
D'où g est paire.

Suffisance.

Comme g est paire, on a que g admet l'axe OY pour axe de symétrie.
On fait une translation des axes aussi, en déplaçant l'origine en $O''(-a, o)$. Le passage du repère (OXY) en (O'' X'' Y'') est donné par :

$$\begin{cases} x'' = x + a \\ y'' = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = x'' - a \\ y = y'' \end{cases}$$

Donc $y = g(x) = f(x + a)$ devient $y'' = f(x'')$.
g admet pour axe de symétrie la droite $x = o$,
d'où il en résulte que f admet pour axe de symétrie la droite $x'' = a$.

6.59. On considère les fonctions continues A, B, C : $I \longrightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, avec $A(x) \leq C(x) \leq B(x)\ \forall x \in I$. Soient $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, et $A(x_1) = f(x_1)$, $B(x_2) = f(x_2)$, où f est une fonction continue sur $[x_1, x_2]$. Montrer qu'il existe $x_3 \in [x_1, x_2]$ tel que $C(x_3) = f(x_3)$

<u>SOLUTION</u>: Preuve par l'absurde :

On suppose que la conclusion n'est pas jus . lors :

$\forall x \in [x_1, x_2]$ On a $C(x) \neq f(x)$, o $C(x) - f(x) \neq 0$.

C et f étant continues sur $[x_1, x_2]$, i. en résulte que $C - f$ est continue sur $[x_1, x_2]$. Donc :

$\forall x \in [x_1, x_2]$ $C(x) - f(x) > 0$, ou bien $\forall x \in [x_1 , x_2]$ $C(x) - f(x) < 0$.

On traite la première situation (l'autre sera analogue).

Puisque $A(x) \leq C(x) \leq B(x)$ sur I, On a :

$$A(x) - f(x) \leq C(x) - f(x) \leq B(x) - f(x) \quad \text{sur } [x_1, x_2].$$

Ou $C(x_2) - f(x_2) \leq B(x_2) - f(x_2) = 0$. Contradiction.

D'où, la conclusion qu'il existe $x_3 \in [x_1 , x_2]$ tel que $C(x_3) = f(x_3)$ est juste.

6.60. Trouver les réels a, b, c, tels que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{a(2X^3 - X^2) + b(X^3 + 5X^2 - 1) + c\,(-3X^3 - X^2)}{a(5X^4 - X) + b\,(-X^4) + c\,(4X^4 + 1) + 2X^2 + 5X} = 1.$$

SOLUTION:

On peut écrire

$$(1) \quad \lim_{X \to -\infty} \frac{(2a + b - 3c)\, X^3 + (-a + 5b - c)\, X^2 - b}{(5a - b + 4c)\, X^4 + 2X^2 + (-a + 5)\, X + c} = 1.$$

Si $5a - b + 4c \neq 0$ alors la limite de (1) est égale à $0 \neq 1$.

Donc $5a - b + 4c = 0$. Il en résulte que $2a + b - 3c = 0$,

parce que sinon , la limite de (1) serait égale à $\pm \infty \neq 1$.

Donc $\lim_{X \to -\infty} \frac{(-a + 5b - c)\, X^2 - b}{2X^2 + (-a + 5)\, X + c} = 1$, d'où $\frac{-a + 5b - c}{2} = 1$.

Ainsi les réels a, b, c vérifient le système :

$$\begin{cases} 5a - b + 4c = 0 \\ 2a + b - 3c = 0 \\ -a + 5b - c = 2 . \end{cases}$$

On résout et on trouve les valeurs

$$a = -\frac{2}{109}, \quad b = \frac{46}{109}, \quad c = \frac{14}{109} .$$

6.61. Soient les nombres naturels a_i , b_j compris entre 0 et 9, avec

$a_1 \neq 9 \neq b_m$ et $a_1 + 1 = x_1$, $9 - a_i = y_i$,

$i = \overline{2, n}$, et $9 - bj = Zj$, $j = \overline{1,m}$. Calculer :

$$\lim_{p \to \infty} \left[\overline{0,x_1} - \left(\sum_{i=2}^{n} \overline{0,\underbrace{0\ldots0}_{i}y_i} + \sum_{K=0}^{p} \sum_{j=1}^{m} \overline{0,\underbrace{0\ldots\ldots0}_{n-1+j+K\cdot m}Z_j} \right) \right].$$

SOLUTION:

On pose $\alpha = \sum_{i=2}^{n} \overline{0,\underbrace{0\ldots0}_{i}y_i} = \overline{0,\ 0y_2\ldots y_n}$, et

$$\beta(p) = \sum_{K=0}^{p} \sum_{j=1}^{m} \overline{0,\underbrace{0\ldots\ldots0}_{n-1+j+K\cdot m}Z_j} = \overline{0,\underbrace{0\ldots0}_{n}\ \underbrace{Z_1\ldots Z_m}_{1}\ldots\underbrace{Z_1\ldots Z_m}_{p}}.$$

Si on prend $t = b_m + 1$, l'on a :

$$\gamma_p = \overline{0,x_1} - (\alpha + \beta(p)) = \overline{0,\ a_1\ldots a_n\ \underbrace{b_1\ldots b_m}_{1}\ldots\underbrace{b_1\ldots b_m}_{p-1}\ \underbrace{b_1\ldots b_{m-1}t}_{p}}. \quad (1)$$

Montrons que $\gamma_p \xrightarrow[p\to\infty]{} \overline{0,a_1\ldots a_n\ (b_1\ldots b_m)} = \gamma_0$.

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists\ p_0 = p(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, p_0 étant le plus petit nombre naturel

qui a la propriété : $p_0 > -\dfrac{\lg \varepsilon\cdot 10^n}{m}$,

tel que $\forall\ p \geqslant p_0$, $p \in \mathbb{N}$, $|\gamma_p - \gamma_0| = 10^{-n-pm} < 10^{-n}.10^{\lg \varepsilon\cdot 10^n} =$

$= \varepsilon$, et donc il en résulte (1).

6.62. On considère les fonctions $f_1, f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{x \to \infty} |f_1(x)| = \infty$ et $\lim\limits_{x \to \infty} f_2(x) = a$. Montrer que $\lim\limits_{x \to \infty} \left(f_1(x) \cdot \left[\frac{1}{f_2(x)} \right] \right)$ existe et calculer cette limite, où $[x]$ représente la partie entière de x.

SOLUTION:

(1) Donc $\lim\limits_{x \to \infty} f_1(x) = +\infty$ ou $-\infty$. On note $f(x) = f_1(x) \cdot \left[\frac{1}{f_2(x)} \right]$;

Discussion. A) Si $a = 0$, alors $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{f_2(x)} = +\infty$ ou $-\infty$ ou $\nexists$

et de même $\lim\limits_{x \to \infty} \left[\frac{1}{f_2(x)} \right] = +\infty$ ou $-\infty$ ou $\nexists$. D'où $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ (d'après (1) et A)) ou on ne peut rien conclure.

B) $a \leq 1$ et $a \neq 0 \Longrightarrow \left[\frac{1}{a} \right] \neq 0$. D'où, aussi, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ (d'après (1) et B), c'est-à-dire d'après (1) et le signe de $\left[\frac{1}{a} \right]$).

C) $a > 1 \Longrightarrow \left[\frac{1}{a} \right] = 0$. On a $f_2(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} a > 1$. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que $a = 1 + \alpha$. Soit $V_\alpha = (a - \alpha, a + \alpha)$ un voisinage de a ; $1 \notin V_\alpha$. Soit une suite $x_n \longrightarrow \infty$, alors $f_2(x_n) \longrightarrow a$ (conforme à la définition de la limite).

$f_2(x_n)$ est une suite réelle qui tend vers a.

Il en résulte qu'en dehors de V_α on trouve tout au plus un nombre limité de termes de la suite $f_2(x_n) \Longleftrightarrow$ il existe tout au plus un nombre limité de termes qui ont la propriété que $f_2(x_i) \leq 1$.

Donc, la plupart des termes se trouvent dans V_α, d'où il existe $n_\alpha \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall\, i > n_\alpha \; f_2(x_i) > 1$.

Alors la suite $\left(\left[\frac{1}{f_2(x_n)} \right] \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suivante :

$\left[\dfrac{1}{f_2(x_1)}\right], \ldots, \left[\dfrac{1}{f_2(x_{n_\alpha})}\right]$, 0, 0, 0,...; donc, à l'exception d'un nombre limité de termes non nuls, cette suite est suite nulle.

Il en résulte que la suite $\left(f(x_n)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suivante :

$$f_1(x_1) \cdot \left[\frac{1}{f_2(x_1)}\right], \ldots, f_1(x_{n_\alpha}) \cdot \left[\frac{1}{f_2(x_{n_\alpha})}\right], 0, 0, 0, \ldots;$$

donc, aussi, à l'exception d'un nombre limité de termes non nuls, cette nouvelle suite c'est la suite constante nulle.

Ainsi $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0.$

6.63. Calculer (sans utiliser l'Hospital) :

$$\lim_{x \to x_0} \prod_{i=1}^{n} \frac{\sqrt[r_i]{f_i(x)} - \sqrt[r_i]{f_i(x_0)}}{\sqrt[s_i]{f_i(x)} - \sqrt[s_i]{f_i(x_0)}}$$

dans les conditions où les racines antérieures existent. Généraliser.

SOLUTION:

On multiplie [illegible]aque fraction au numérateur et au dénominateur par les conjugués du numérateur et du dénominateur.

Soit $1 \leq i \leq n$, on note $A = \sqrt[r_i]{f_i(x)}$; $B = \sqrt[r_i]{f_i(x_0)}$, $C = \sqrt[s_i]{f_i(x)}$,

$D = \sqrt[s_i]{f_i(x_0)}$ et on a :

$$\frac{A-B}{C-D} = \frac{(A-B)\,(A^{r_i-1} + A^{r_i-2}B^1 + \dots + A^1 B^{r_i-2} + B^{r_i-1})\,(C^{s_i-1} + C^{s_i-2}D^1 + \dots}{(C-D)\,(A^{r_i-1} + A^{r_i-2}B^1 + \dots + A^1 B^{r_i-2} + B^{r_i-1})\,(C^{s_i-1} + C^{s_i-2}D^1 + \dots}$$

$$\frac{\dots + C^1 D^{s_i-2} + D^{s_i-1})}{\dots + C^1 C^{s_i-2} + D^{s_i-1})} = \frac{(A^{r_i} - B^{r_i})}{(C^{s_i} - D^{s_i})} \cdot \frac{(C^{s_i-1} + C^{s_i-2}D^1 + \dots + D^{s_i-1})}{(A^{r_i-1} + A^{r_i-2}B^1 + \dots + B^{r_i-1})} \xrightarrow[x \to x_0]{}$$

$$\xrightarrow[x \to x_0]{} \frac{s_i}{r_i} \cdot \frac{\left(\sqrt[s_i]{f_i(x_0)}\right)^{s_i-1}}{\left(\sqrt[r_i]{f_i(x_0)}\right)^{r_i-1}} = \frac{s_i}{r_i} \cdot \left(f_i(x_0)\right)^{\frac{s_i - r_i}{s_i \cdot r_i}} .$$

D'où, la limite de l'énoncé sera égale à :

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{s_i}{r_i} \cdot \left(f_i(x_0)\right)^{\frac{s_i - r_i}{s_i r_i}}$$

Généralisation :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\prod_{i=1}^{n}\left(\sqrt[r_i]{f_i(x)} - \sqrt[r_i]{f_i(x_0)}\right)}{\prod_{j=1}^{m}\left(\sqrt[s_j]{f_j(x)} - \sqrt[s_j]{f_j(x_0)}\right)} = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} \frac{s_i}{r_i} \left(f_i(x_0)\right)^{\frac{s_i - r_i}{s_i r_i}} & ,\text{si } n = m; \\ 0 & ,\text{si } n > m; \\ \text{n'existe pas} & ,\text{si } n < m; \end{cases}$$

dans les conditions où les racines antérieures existent.
Si $n < m$ la limite n'existe pas parce que le dénominateur est égal à zéro, alors que le numérateur est non nul; d'où les deux limites latérales sont différentes.

Remarque : s'il existe au moins une fonction constante f_{i_0} , $1 \leq i_0 \leq \min\{m, n\}$, alors la limite n'existe pas.
Même chose pour la limite de l'énoncé du problème.

A) L G E B R E

—=oOo=- -

7.64. Comparer les ensembles :

$$A = \left\{ X \mid X = \sum_{i=1}^{n} a_i K_i + a \text{ , avec } (K_1,\dots,K_n) \in \mathbb{Z}^n \text{, et } a_1,\dots,a_n \text{ , } a \text{ sont des constantes entières telles que } (a_1,\dots,a_n)=1 \right\}$$

$$\text{et} \quad B = \left\{ X \mid X = \sum_{j=1}^{m} b_j K_j + b \text{, avec } (K_1,\dots,K_m) \in \mathbb{Z}^m \text{, et } b_1,\dots,b_m, b \text{ sont aussi des constantes entières} \right\}.$$

SOLUTION:

Tout d'abord on démontrera que $A = \mathbb{Z}$.

Bien sûr $A \subseteq \mathbb{Z}$, et aussi $\mathbb{Z} \subseteq A$ puisque $\forall Z \in \mathbb{Z} \quad \exists (K_1^o,\dots,K_n^o) \in$

$$\in \mathbb{Z}^n : \sum_{1}^{n} a_i K_i^o + a = Z$$

parce que le plus grand diviseur commun $(a_1,\dots,a_n) = 1$ et 1 divise $Z - a$.

On voit tout-de-suite que $B \subseteq \mathbb{Z}$.

Si $(b_1,\dots,b_m) = 1$ alors $B = \mathbb{Z} = A$, au contraire $B \subset A$ et $B \neq A$.

7.65. Soit p un nombre premier et M un ensemble de p nombres naturels consécutifs. Montrer que M ne peut pas être divisé en deux sous-ensembles disjoints M_1 et M_2 , avec $M_1 \cup M_2 = M$, tel que le produit des nombres de M_1 soit égal au produit des nombres de M_2 .

SOLUTION:

Parce que M contient p nombres naturels consécutifs, alors M constitue un système complet de restes modulo p. Donc :

$$\exists n_0 \in M \;:\; n_0 = \mathcal{M}p \quad \text{et} \quad \forall n \in M - \{ n_0 \} \quad , n \neq \mathcal{M}p.$$

On considère que $n_0 \in M_1$ (même démonstration dans le cas contraire). Le produit des nombres de M_1 se divise par p, mais le produit des nombres de M_2 ne se divise pas par p, puisque p est un nombre premier et qu'il n'existe aucun élément de M_2 qui soit multiple de p. D'où, le produit de M_1 ne peut pas être égal au produit de M_2 .

7.66. Soient M un ensemble qui contient m nombres naturels, $m \geq 2$, et $n \in \mathbb{N}^*$, $n < m$. On pose $K = \left[\frac{m-1}{n}\right] + 1$, où $[X]$ représente la partie entière de X.

Montrer qu'il existe un sous-ensemble M' de M, tel que :

a) M' contient au moins K éléments

b) la différence entre deux éléments quelconques de M' est multiple de n.

SOLUTION:

L'ensemble M a la forme : $M = \{a_1, \ldots, a_m\}$, où tous les $a_i \in \mathbb{N}$.
$\forall i \in \{1, \ldots, m\}$, $a_i = \mathcal{M}_n + r_i$ avec $r_i \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.
Soit $m = q.n + r$, $q \in \mathbb{N}$, $0 \leq r \leq n - 1$. Parce que $n < m$, il en résulte que $q \in \mathbb{N}^*$. Construisons l'ensemble $M' \subseteq M$.
Pour que la condition b) soit réalisée il faut qu M' contienne seulement les éléments de M qui divisés par n donnent le même reste.

Les restes obtenus par la division par n sont :
0, 1, ..., n - 1. On a n classes d'équivalence modulo n.

Le problème se réduit à la démonstration qu'il existe une classe qui contient au moins K éléments. M' sera justement cette classe.

1) Cas où r = 0. Donc $K = \left[\frac{m-1}{n}\right] + 1 = \left[\frac{q \cdot n - 1}{n}\right] + 1 = q$.

Si les $m = q \cdot n$ éléments de M sont distribués également dans les n classes, alors chaque classe contient q éléments, et le problème est résolu.

Dans le cas contraire, il existe au moins une classe qui contient au moins q éléments et là aussi, le problème est résolu.

2) Cas où $r \neq 0$. Donc $K = \left[\frac{m-1}{n}\right] + 1 = \left[\frac{q \cdot n + r - 1}{n}\right] + 1 = q + 1$.

Les $m = nq + r$ éléments de M sont distribués n'importe comment dans les n classes, il en résulte qu'il existe au moins une classe qui contienne au moins q + 1 éléments (sinon il en résulterait qu'on aurait au maximum $q \cdot n$ éléments $< m$), et le problème est complètement résolu.

7.47. Soient les polynômes homogènes $P_n(x, y)$ et $Q_n(x, y)$ de n - ième degré en x et y. Si $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ alors $\frac{P_n(a_1, b_1)}{Q_n(a_1, b_1)} = \frac{P_n(a_2, b_2)}{Q_n(a_2, b_2)}$.

SOLUTION:

Soient $P_n(x, y) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} y^1 + \ldots + \alpha_{n-1} xy^{n-1} + \alpha_n y^n$ et

$Q_n(x, y) = \beta_0 x^n + \beta_1 x^{n-1} y^1 + \ldots + \beta_{n-1} xy^{n-1} + \beta_n y^n$.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Longrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \Longrightarrow \frac{a_1^n}{a_2^n} = \frac{b_1^n}{b_2^n} = \frac{a_1^{n-i}\, b_1^i}{a_2^{n-i}\, b_2^i} =$$

$$= \frac{\alpha_i\, a_1^{n-i}\, b_1^i}{\alpha_i\, a_2^{n-i}\, b_2^i}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Puisque la somme des numérateurs divisée par la somme des dénominateurs est égale à chaque rapport, on a :

$$\frac{\alpha_0 a_1^n + \alpha_1 a_1^{n-1} b_1^1 + \ldots + \alpha_n b_1^n}{\alpha_0 a_2^n + \alpha_1 a_2^{n-1} b_2^1 + \ldots + \alpha_n b_2^n} = \frac{a_1^n}{a_2^n}.$$

De même on obtient :

$$\frac{\beta_0 a_1^n + \beta_1 a_1^{n-1} b_1^1 + \ldots + \beta_n b_1^n}{\beta_0 a_2^n + \beta_1 a_2^{n-1} b_2^1 + \ldots + \beta_n b_2^n} = \frac{a_1^n}{a_2^n},$$

donc $\frac{P_n(a_1,b_1)}{P_n(a_2,b_2)} = \frac{Q_n(a_1,b_1)}{Q_n(a_2,b_2)}$, d'où la conclusion.

<u>7.68</u>: Soit un nombre naturel $p \geq 2$ et une suite telle que

$a_1 = 1$, $a_{n+1} = p \cdot a_n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall K \in \mathbb{N}^*$,

K s'écrit uniquement de la façon suivante :

$$K = t_1 a_{n_1} + \dots + t_l a_{n_l} ,$$

avec $1 \leq t_i \leq p-1$ pour $i \in \{1,2,\dots,l-1\}$ et $1 \leq t_l \leq p$ et $n_1 >$

$> \dots > n_l$.

<u>Solution</u> :

On déduit tout de suite que $a_n = \dfrac{p^n - 1}{p-1}$ qui est une suite de

nombres naturels , strictement croissante , illimitée . Donc :

$\exists\, n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_{n_1} \leq k < a_{n_1+1} = pa_{n_1} + 1$.

D'où K s'écrit uniquement de la façon

$K = t_1 \cdot a_{n_1} + r_1 \leq pa_{n_1}$, avec $o \leq r < a_{n_1}$.

Si $r_1 = o$, il en résulte que $t_1 = \dfrac{K}{a_{n_1}}$ et $1 \leq t_1 \leq \left[\dfrac{a_{n_1} \cdot p}{a_{n_1}}\right] = p$.

Si $r_1 \neq o$, il en résulte qu'il existe $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$a_{n_2} \leq r_1 < a_{n_2+i} = p \cdot a_{n_2} + 1 \implies r_1 = t_2 a_{n_2} + r_2$

$r_1 < a_{n_1} \implies n_2 < n_1$; $t_1 = \dfrac{k - r_1}{a_{n_1}} \leq \dfrac{k-1}{a_{n_1}} = \dfrac{pa_{n_1} - 1}{a_{n_1}} < p$;

donc $1 \leq t_1 \leq p-1$

Ainsi K s'écrit uniquement : $k = t_1 a_{n_1} + t_2 a_{n_2} + r_2$,et le procédé

continue . Après un nombre limité de pas on arrive à r=o. On fait la même démonstration pour $n_i > n_{i+1}$, $i \in \{1,\dots,l-1\}$ et

$1 \leq t_i \leq p-1$; $i \in \{1,\dots,l-1\}$ et $1 \leq t_l \leq p$

et le problème est résolu.

7.69 :

Si $a_1, \dots, a_n$, b sont des nombres réels positifs , avec $b \leqslant a_1 + \dots + a_n$, et $\alpha \notin \{-a_1, \dots, -a_n, -b\}$, alors

$$\frac{b}{\alpha + b} \leqslant \frac{a_1}{\alpha + a_1} + \dots + \frac{a_n}{\alpha + a_n}$$

Solution :

On utilise le raisonnement par récurrence pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour n=1 , si $b \leqslant a_1$, on a $\frac{b}{\alpha + b} - \frac{a_1}{\alpha + a_1} \leqslant 0 \iff$

$\iff \frac{\alpha(b - a_1)}{(\alpha + b)(\alpha + a_1)} \leqslant 0$; qui est vrai , en tenant compte de l'hypothèse . On suppose l'inégalité vraie pour toutes les valeurs inférieures et égales à n . On le démontrera pour n+1 :

$b \leqslant (a_1 + \dots + a_n) + a_{n+1}$ et , conformément à l'hypothèse de récurrence on a :

$$\frac{b}{\alpha + b} \leqslant \frac{(a_1 + \dots + a_n)}{\alpha + (a_1 + \dots + a_n)} + \frac{a_{n+1}}{\alpha + a_{n+1}} ;$$

mais $a_1 + \dots + a_n \leqslant a_1 + \dots + a_n$, donc si on applique encore une fois l'hypothèse de récurrence on obtient :

$$\frac{b}{\alpha + b} \leqslant \frac{a_1}{\alpha + a_1} + \frac{a_2}{\alpha + a_2} + \dots + \frac{a_n}{\alpha + a_n} + \frac{a_{n+1}}{\alpha + a_{n+1}} .$$

7.70. On donne l'expression $E(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, avec les réels A, B, C, D, E et F, et $A^2 + C^2 \neq 0$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $E(x,y)$ admette un extrémum.

SOLUTION:

Puisque $A^2 + C^2 \neq 0$, il résulte qu'au moins A ou C est non nul, soit A ; (les résultats seront analogues si $C \neq 0$).

On suppose que $E(x,y)$ admet un extrémum.

$$E(x,y) = A\left(x^2 + \frac{B}{A}xy + \frac{D}{A}x\right) + Cy^2 + Ey + F = A\left(x + \frac{B}{2A}y + \frac{D}{2A}\right)^2 - \frac{B^2}{4A}y^2 - \frac{D^2}{4A} - \frac{2BD}{4A}y + Cy^2 + Ey + F = A\left(x + \frac{B}{2A}y + \frac{D}{2A}\right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A}y^2 + \frac{4AE - 2BD}{4A}y + \left(F - \frac{D^2}{4A}\right).$$

$\frac{4AC - B^2}{4A} \neq 0$, parce que sinon $E(x,y)$ n'aurait pas d'extrémum.

On a :

$$E(x,y) = A\left(x + \frac{B}{2A}y + \frac{D}{2A}\right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A} \cdot \left[y^2 + 2\,\frac{2AE - BD}{4AC - B^2}y + \left(\frac{2AE - BD}{4AC - B^2}\right)^2\right] - \frac{4AC - B^2}{4A} \cdot \left(\frac{2AE - BD}{4AC - B^2}\right)^2 + \left(F - \frac{D^2}{4A}\right) = A\left(x + \frac{B}{2A}y + \frac{D}{2A}\right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A}\left(y + \frac{2AE - BD}{4AC - B^2}\right)^2 + \left[F - \frac{D^2}{4A} - \frac{(2AE - BD)^2}{4A(4AC - B^2)}\right] \quad (1)$$

Evidemment $E(x,y)$ admet un extrémum seulement si A et $\frac{4AC - B^2}{4A}$ ont le même signe, c'est-à-dire $A \cdot \frac{4AC - B^2}{4A} > 0$, d'où $4AC - B^2 > 0$, ce qui constitue une condition nécessaire pour que $E(x,y)$ admette un extrémum (lorsque les deux sont positifs on a un minimum, sinon un maximum).

Mais $4AC - B^2 > 0$ constitue aussi une condition suffisante, puisque $E(x,y)$ s'écrit comme (1) et que A et $\frac{4AC - B^2}{4A}$ ont le même signe.

7.71. Soient les entiers $A = \overline{a_1 \ldots a_{2n}} + \overline{a_{2n} \ldots a_1}$ et $B = \overline{a_1 \ldots a_n} - \overline{a_n \ldots a_1}$ écrits en base $b \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Montrer que A est divisible par b + 1 et B est divisible par b - 1

SOLUTION:

Calculons les critères de divisibilité par b + 1 et par b - 1 en base b.

$b^i \equiv (-1)^i \pmod{b+1}$ et $b^i \equiv 1 \pmod{b-1}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Ainsi $A \equiv (a_{2n} - a_{2n-1} + \ldots + (-1)^K a_K + \ldots + a_2 - a_1) + (a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{K+1} a_K + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n}) \equiv 0 \pmod{b+1}$.

De la même façon $B \equiv (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \equiv 0 \pmod{b-1}$.

7.72. Soient a un naturel et p un entier non nul. Déterminer le nombre des éléments de l'ensemble $M = \{ a, \overline{aa}, \dots, \underbrace{\overline{a \dots a}}_{n} \}$ qui sont divisibles par p. Discussion.

SOLUTION:

Soit a en base 10 écrit sous la forme :

$a = \overline{a_1 \dots a_s}$, avec $a_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq s$, $s \in \mathbb{N}^*$.

Un élément $\alpha \in M$ est $\alpha = \underbrace{\overline{a \dots a}}_{n}$, avec $1 \leq n \leq m$, n entier .

$\alpha = a \cdot 10^{(n-1)s} + a \cdot 10^{(n-2)s} + \dots + a \cdot 10^{1 \cdot s} + a = a\,(1 + 10^s + \dots +$

$+ 10^{(n-1)s}) = a \dfrac{10^{sn} - 1}{10^s - 1}$. Il faut trouver les n pour lesquels $\alpha \vdots p$.

Soit $d = (a,p)$. Alors $a = d \cdot a_1$ et $p = d \cdot p_1$ et $(a_1 , p_1) = 1$. Donc,

il faut déterminer n tel que $\not{d}\, a_1 \dfrac{10^{sn} - 1}{10^s - 1} \vdots \not{d}\, p_1$.

1) Si $(p_1 , 10) \neq 1$, alors aucun élément de M n'est divisible par p.

2) Si $(p_1 , 10) = 1$, soit δ l'ordre de la classe de restes de 10 par rapport au module $p_1\,(10^s - 1)$. On a ainsi :

$10^{\delta} - 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p_1\,(10^s - 1)\,)$, donc $10^{\delta} - 1 \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ (10^s - 1)\,)$ et il en résulte que $\delta = K \cdot s$, avec $K \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe exactement

$\left[\dfrac{m}{K} \right] = \left[\dfrac{ms}{\delta} \right]$ éléments de M qui sont divisibles par p.

7.73. Démontrer que $\forall K \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ existe une infinité de nombres naturels dont la propriété est qu'ils admettent exactement K diviseurs positifs.

SOLUTION:

Tout nombre naturel A s'écrit sous la forme :

$$A = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s} \quad , \quad (\text{bien sûr } A \notin \{0, 1\})$$

où p_i sont des nombres premiers, $i \in \{1, \dots, s\}$ et $p_i \neq p_j$ pour $i \neq j$, $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ avec $i \in \{1, \dots, s\}$, $s \in \mathbb{N}^*$ (c'est la forme canonique du nombre, qui est unique).

On note d (A) = le nombre des diviseurs positifs de A.

Alors $d(A) = \prod_{i=1}^{s} (\alpha_i + 1)$. (1)

Notre problème se réduit à la démonstration que l'équation $\prod_{i=1}^{s} (\alpha_i + 1) = K$ a des solutions dans $(\mathbb{N}^*)^s$; (les inconnues sont $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, et s).

On pose $s = 1 \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1 = K - 1 \in \mathbb{N}^*$ et on obtient $K - 1 + 1 = K$.

D'où tous les nombres $n = p^{K-1}$, avec un nombre premier quelconque, ont exactement K diviseurs positifs (on a une infinité de nombres n parce qu'on a une infinité de nombres premiers p).

On peut voir que l'équation (1) a beaucoup d'autres solutions. Par exemple, si $K = K_1 \dots K_t$ avec tous les $K_i \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, on a la solution infinie : $s = t$, $\alpha_1 = K_1 - 1, \dots, \alpha_t = K_t - 1$

d'où $n = p_1^{K_1 - 1} \dots p_t^{K_t - 1}$ où tous les p_j sont des nombres premiers différents.

7.74. Sachant que a_i , $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, satisfont aux conditions d'existence pour tous les n logarithmes, résoudre l'équation :

$$\log_{a_1} \log_{a_2} \ldots \log_{a_n} x = b$$

SOLUTION:

$$\log_{a_1} (\log_{a_2} \log_{a_3} \ldots \log_{a_n} x) = b$$

$$\iff \log_{a_2} \log_{a_3} \ldots \log_{a_n} x = a_1^b \text{ ou } \log_{a_2} (\log_{a_3} \ldots \log_{a_n} x) = a_1^b$$

$$\iff \log_{a_3} \log_{a_4} \ldots \log_{a_n} x = a_2^{a_1^b} \text{ ou } \log_{a_3} (\log_{a_4} \ldots \log_{a_n} x) = a_2^{a_1^b}$$

$$\iff \log_{a_4} \log_{a_5} \ldots \log_{a_n} x = a_3^{a_2^{a_1^b}}$$

$$\iff \log_{a_{n-1}} \log_{a_n} x = a_{n-2}^{a_{n-3}^{a_{n-4}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a_1^b}}}}}}$$

$$\iff \log_{a_n} x = a_{n-1}^{a_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a_1^b}}}}}$$

$$\iff x = a_n^{a_{n-1}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a_1^b}}}}}$$

qui est la solution cherchée.

7.75. Si $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \neq 1$ et $\forall \alpha \in \mathbb{Q}$ $a \neq b^{\alpha}$, alors $\log_b a \notin \mathbb{Q}$. Et réciproquement.

SOLUTION:

Tout d'abord on voit que ce problème donne une extension à quelques problèmes particuliers; par exemple "montrer que $\log_{21} 10$ n'est pas un nombre rationnel", etc...

La démonstration se fera par l'absurde.

On suppose que $\log_b a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, avec le p.g.c.d $(m,n) = 1$.

Il en résulte que $b^{\frac{m}{n}} = a$. En élevant à la puissance n cette égalité, il vient : $b^m = a^n$, avec $m, n \in \mathbb{Z}$.

Mais, $\forall \alpha \in \mathbb{Q}$, $a \neq b^{\alpha}$, ce qui implique que $\forall \alpha \in \mathbb{Q}$, $a^n \neq b^{n\alpha}$, où $n\alpha \in \mathbb{Q}$ (parce que $a > 0$ et $b > 0$).

Donc, si on ne peut pas écrire a comme une puissance rationnelle de b, on ne peut pas non plus écrire a^n comme une puissance rationnelle de b.

Ainsi, il en résulte que $a^n \neq b^m$ $\forall m \in \mathbb{Q}$ -

Contradiction.

Donc $\log a \notin \mathbb{Q}$.

Réciproquement. Si $\log_b a \notin \mathbb{Q}$, alors bien sûre $a \neq b^{\alpha}$ $\forall \alpha \in \mathbb{Q}$, parce que sinon il en résulterait que $\log_b b^{\alpha} = \alpha \in \mathbb{Q}$.

Et le problème est complètement démontré.

7.16. Soit $s \neq 0$ un nombre naturel. Déterminer les nombres naturels n qui vérifient la propriété que $\left[\sqrt[s]{n}\right]$ divise n. (on note $[x]$, la partie entière de x.)

SOLUTION:

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N} : p^s \leq n < (p+1)^S = p^S + C_S^1 p^{S-1} + \dots + C_S^{S-1} p^1 + 1$

D'où n s'écrit : $n = p^S + K$, avec

$$0 \leq K < C_S^1 p^{s-1} + \dots + C_S^{S-1} p^1 + 1, \text{ et } K \in \mathbb{N}.$$

Il en résulte $\left[\sqrt[s]{n}\right] = p$. Parce que $\left[\sqrt[s]{n}\right]$ divise n, on obtient p divise K. Donc $K = \alpha \cdot p$, avec $\alpha \in \mathbb{N}$ et

$$0 \leq K \leq (p+1)^S - (p^S + 1).$$

D'où $0 \leq \alpha \leq \dfrac{(p+1)^S - (p^S+1)}{p} \in \mathbb{N}$.

Donc, les nombres naturels qui ont la propriété de l'énoncé sont :

$n = p^S + \alpha \cdot p$, avec $\alpha \in \mathbb{N}$ et $0 \leq \alpha \leq \dfrac{(p+1)^S - (p^S+1)}{p}$, $p \in \mathbb{N}^*$,

et aussi la solution triviale $n = 0$, puisque 0 divise 0.

7.17. Soit p un nombre naturel, $p \geq 2$ et la fonction :

$$\beta_p(x) = \left[\frac{x}{p}\right] + \left[\frac{x}{p^2}\right] + \dots \qquad , x \in \mathbb{Z}_+ .$$

Montrer que si $x = (\overline{a_n \dots a_1 a_0})_p$ alors :

$$\beta_p(x) = \frac{1}{p-1}\left[x - (a_0 + a_1 + \dots + a_n)\right] .$$

SOLUTION:

$$x = (\overline{a_n \dots a_1 a_0})_p = a_n p^n + \dots + a_1 p^1 + a_0$$

$$\left[\frac{x}{p}\right] = a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \dots + a_1 \text{ parce que } \left[\frac{a_0}{p}\right] = 0$$

$$\left[\frac{x}{p^2}\right] = a_n p^{n-2} + a_{n-1} p^{n-3} + \dots + a_2 \text{ parce que } 0 \leq a_1 p^1 + a_0 < p^2$$

- -

$$\left[\frac{x}{p^n}\right] = a_n$$

$\left[\frac{x}{p^m}\right] = 0$ pour tout m naturel, $m \geq n + 1$.

Donc $\beta_p(x) = a_n (1 + \dots + p^{n-1}) + a_{n-1} (1 + \dots + p^{n-2}) +$

$$+ \dots + a_2(1 + p) + a_1 = a_n \frac{p^n-1}{p-1} + \dots + a_2 \frac{p^2-1}{p-1} + a_1 \frac{p-1}{p-1} =$$

$$= (a_n p^n + \dots + a_1 p^1 - a_n - \dots - a_1) \cdot \frac{1}{p-1} =$$

$$= \frac{1}{p-1}\left[x - (a_0 + a_1 + \dots + a_n)\right] .$$

7.7°. Démontrer l'inégalité :

$$\left(\frac{a_1^2}{a_2^2}+\frac{a_2^2}{a_1^2}\right)+\left(\frac{a_2^2}{a_3^2}+\frac{a_3^2}{a_2^2}\right)+\dots+\left(\frac{a_n^2}{a_1^2}+\frac{a_1^2}{a_n^2}\right)\geqslant$$

$$\geqslant\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\right)^2+\left(\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_2}\right)^2+\dots+\left(\frac{a_n}{a_1}+\frac{a_1}{a_n}\right)^2,$$

où $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $n \geqslant 2$.

SOLUTION:

Il suffit de démontrer :

$$\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)\geqslant\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2, \text{ où } a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\} ;$$

En élevant au carré et en passant tous les termes dans le membre gauche et en faisant les réductions des termes semblables il en résulte que :

$$\frac{a^4}{b^4}+\frac{b^4}{a^4}-\frac{a^2}{b^2}-\frac{b^2}{a^2}\geqslant 0.$$

On note $\frac{a^2}{b^2}=u$. On a $u^2+\frac{1}{u^2}-u-\frac{1}{u}\geqslant 0$.

Ou $\left(u+\frac{1}{u}\right)^2-\left(u+\frac{1}{u}\right)-2\geqslant 0$, $u=\frac{a^2}{b^2}>0$.

On note $t=u+\frac{1}{u}\geqslant 2$, on a $t^2-t-2\geqslant 0$, c'est-à-dire $(t+1)(t-2)\geqslant 0$, inégalité qui est vraie pour $t\geqslant 2$.

Donc chaque parenthèse du membre gauche, élevée au carré, est supérieure au égale à la parenthèse correspondante du membre droit, élevée au carré.

et seulement si l'équation $E(x_1,\dots,x_n, y_1, \dots, y_m) = t$ admet des solutions entières, où les inconnues sont $x_1,\dots,x_n, y_1,\dots, y_m, t$.

Cette équation est équivalente à :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{j=1}^{m} b_j y_j t - bt = -a \qquad (1)$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{j=1}^{m} b_j t_j - bt = -a \quad \text{avec } t_j = y_j t, j \in \{1,\dots,m\} \quad (2)$$

NECESSITE.

Si cette équation admet des solutions dans $\mathbb{Z}$, alors il en résulte que le p.g.c.d. des nombres $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m,b$ divise a.

SUFFISANCE.

α) Le cas $b \neq 0$. Puisque le p.g.c.d. des nombres $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m,b$ divise b il en résulte que l'équation (2) admet des solutions dans $\mathbb{Z}$, donc il existe $t \in \mathbb{Z}$ telque $E(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) = t$.

β) Le cas $b = 0$. Notons $d_1 = (a_1,\dots,a_n)$ et $d_2 = (b_1,\dots,b_m)$. D'où $D = (a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m,b) = (d_1,d_2)$ divise a. L'équation (1) devient

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - d_2 \left(\sum_{j=1}^{m} b'_j y_j \right) . t = -a, \text{ où } b_j = d_2 b'_j \text{ avec}$$

$1 \leq j \leq m$.

Comme $(b'_1, \dots, b'_m) = 1$, il en résulte qu'il existe $(y^\circ_1,\dots,y^\circ_m) \in \mathbb{Z}^m$ tel que $\sum_{i=1}^{m} b'_j y^\circ_j = 1$. D'où on a :

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - d_2 t = -a .$$ Puisque $D = (d_1, d_2) = (a_1,\dots,a_n,d_2)$ divise a, il en résulte qu'il existe t de $\mathbb{Z}$ tel que $E(x_1,\dots,x_n, y_1,\dots,y_m) = t$.

7.79. Montrer que si $a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 \dots a_n$ ($a_i \neq 0$, $i \in \{1,2,\dots n\}$),

alors :

$$a_1 \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) + a_2 \left(\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_n} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_1}\right) +$$

$$+ \dots + a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} \right) + n = \sum_{i=1}^{n} a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n$$

SOLUTION:

Le membre gauche de l'égalité s'écrit :

$$\left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1}{a_3} + \dots + \frac{a_1}{a_n} \right) + \left(\frac{a_2}{a_3} + \frac{a_2}{a_n} + \dots + \frac{a_2}{a_n} + \frac{a_2}{a_1} \right) +$$

$$+ \dots + \left(\frac{a_n}{a_1} + \frac{a_n}{a_2} + \dots + \frac{a_n}{a_{n-1}} \right) + n = \left(\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_1} + \dots +\right.$$

$$\left.\frac{a_n}{a_1} \right) + \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_3}{a_2} + \dots + \frac{a_n}{a_2} \right) + \dots + \left(\frac{a_1}{a_n} + \frac{a_2}{a_n} + \dots +\right.$$

$$\left.+ \frac{a_{n-1}}{a_n} \right) + n = \frac{a_1 \dots a_n - a_1}{a_1} + \frac{a_1 \dots a_n - a_2}{a_2} + \dots + \frac{a_1 \dots a_n - a_n}{a_n} + n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_1 \dots a_{i-1}\, a_{i+1} \dots a_n - n + n = \sum_{i=1}^{n} a_1 \dots a_{i-1}\, a_{i+1} \dots a_n .$$

- - - -

7.80. Soient les nombres entiers a, b, a_i, b_j avec $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Montrer que si x_i et y_i (avec $i \in \{1,\dots,n\}$ et $j \in \{1,\dots,m\}$) sont des nombres entiers, l'expression :

$$E(x_1,\dots,x_n, y_1,\dots,y_m) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a}{\sum_{j=1}^{m} b_j y_j + b}$$

a des valeurs entières si et seulement si le plus grand commun diviseur des nombres $a_1, \dots, a_n$, $b_1 \dots b_m$, b divise a.

SOLUTION:

L'expression $E(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ aura des valeurs entières si

...

7.81. Soit $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \prod_{j=1}^{k} (x - a_{i_j})$$

avec k nombre naturel impair.

Montrer que quelles que soient les valeurs $a_1, \dots, a_n$ la fonction n'a pas le même signe pour tout l'axe réel.

SOLUTION:

Soit $m = \min_i \{a_i\}$

$M = \max_i \{a_i\}$

On a $m \leq M$ (le signe = ne nous dérange pas)

Pour $x \in (-\infty, m)$ on a $x - a_i < 0$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et

$\prod_{j=1}^{k} (x - a_{i_j}) < 0$ parce que k est impair et tous les facteurs du produit sont négatifs.

Donc $f(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty, m)$

De mêm $f(x) > 0$, $\forall x \in (M, \infty)$.

Ainsi les signes sont différents et $\forall a_1, \dots, a_n$ en $\mathbb{R}$ la fonction est négative et positive à la fois.

= = = = = = = = = = =

7.82. Si les nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont naturels non nuls, montrer que :

$$1 + \sum_{K=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_K \leq n} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_K} = \prod_{h=1}^{n} (\alpha_h + 1).$$

SOLUTION :

Soit le naturel $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$, où $p_1, \dots, p_n$ sont des nombres premiers distincts deux à deux.

On détermine le nombre des diviseurs positifs D de ce naturel. On sait que $D = \prod_{h=1}^{n} (\alpha_h + 1)$.

Puis, on applique une autre méthode pour calculer D : on écrit proprement tous les diviseurs (K représentera le nombre des facteurs premiers différents, du diviseur d) :

K = 1. On a $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$ diviseurs : $p_1^1, \dots, p_1^{\alpha_1}, \dots$

$\dots, p_n^1, \dots, p_n^{\alpha_n}$;

K = 2. On a $\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}$ diviseurs :

$$\begin{cases} p_1 p_2^1, \dots, p_1 p_2^{\alpha_2} \\ \dots\dots\dots\dots \text{(Sont } \alpha_1\alpha_2 \text{ diviseurs)} \\ p_1^{\alpha_1} p_2^1, \dots, p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \end{cases}$$

; . . . .

$$\begin{cases} p_{n-1}p_n^1, \dots, p_{n-1} p_n^{\alpha_n} \\ \dots\dots\dots\dots \text{(Son } \alpha_{n-1}\alpha_n \text{ diviseurs)} \\ p_{n-1}^{\alpha_{n-1}} p_n^1, \dots, p_{n-1}^{\alpha_{n-1}} p_n^{\alpha_n} \end{cases}$$

. . . .

K = ℓ. De manière analogue, on a $\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq n} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_\ell}$

diviseurs.

Parce que K prend des valeurs de 1 jusqu'à n, il en résulte que

$$D = 1 + \sum_{K=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_K \leq n} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_K}$$

(On a ajouté 1 parce que, si K = 0 on a le diviseur 1 pour a).

- - - - - - -

7.83. Déterminer les nombres naturels de n chiffres tels que l'expression :

$$\frac{\overline{x_1 \dots x_n}}{\sum_{h=0}^{m-1} \overline{x_{i_h+1}\, x_{i_h+2} \dots x_{i_{h+1}}}}$$

soit maximum, sachant que

$i_0 = 0$, i_1, ..., i_{m-2}, $i_{m-1} = n$ sont fixés, et que tous les nombres sont écrits en base b.

SOLUTION:

On note $x_{i_h+1}\, x_{i_h+2} \ldots x_{i_{h+1}} = a_{h+1}$, $0 \leq h \leq m-1$. Dans ce cas le rapport devient :

$$R = \frac{a_1 . b^{n-i_1} + a_2 . b^{n-i_1-i_2} + \ldots + a_m}{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}.$$

On pose $c_j = b^n - \sum_{h=1}^{j} i_h$, $1 \leq j \leq m$. Donc $R = \dfrac{\sum_1^m a_j c_j}{\sum_1^m a_j} =$

$$= 1 + \frac{\sum_1^{m-1} a_j (c_j - 1)}{\sum_1^m a_j}$$, qui est maximum lorsque $a_m = 0$ (puisque $c_m = 1$).

. D'où $R_{max} = 1 + \dfrac{\sum_1^{m-1} a_j (c_j - 1)}{\sum_1^{m-1} a_j} =$

$$= 1 + (c_{m-1} - 1) + \frac{\sum_1^{m-1} a_j (c_j - 1 - c_{m-1} + 1)}{\sum_1^{m-1} a_j} = c_{m-1} + \frac{\sum_1^{m-2} a_j (c_j - c_{m-1})}{\sum_1^{m-1} a_j},$$

qui est maximum lorsque $a_{m-1} = 0$. Donc

$$R_{max} = c_{m-1} + \frac{\sum_1^{m-2} a_j (c_j - c_{m-1})}{\sum_1^{m-2} a_j}$$ et le procédé continue.

D'après un nombre limité de pas, on a :

$$R_{max} = c_3 + \frac{a_1 (c_1 - c_3) + a_2 (c_2 - c_3)}{a_1 + a_2} = c_3 + (c_2 - c_3) + \frac{a_1 (c_1 - c_2)}{a_1 + a_2}$$

qui est maximum lorsque $a_2 = 0$. D'où $R_{max} = c_2 + \dfrac{a_1 (c_1 - c_2)}{a_1} = c_1 = b^{n-i_1}$.

...

Ainsi les nombres cherchés sont : $\overline{x_1 x_2 \dots x_{i_1} \underbrace{0\dots0}_{n-i_1}}$ écrits en base b.

- - - - - - - - - - -

<u>7.84.</u> On considère toutes les classes $C_1, C_2, \dots, C_K$ de restes modulo m, premiers à m, et $a_i \in C_i$, $1 \leq i \leq K$. Démontrer que $\forall m \in \mathbb{Z}$ et $0 < s \leq K$, s impair, on a

$$m \mid \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq K} a_{i_1} \dots a_{i_s}$$

<u>Solution</u> :

Evidemment $K = \varphi(m)$, où φ est l'indicateur d'Euler.

1º) $m = 0 \Longrightarrow \varphi(m) = 2 \Longrightarrow s = 1$

$C_1 = \{-1\}$; $C_2 = \{+1\}$ et donc $a_1 = -1$, $a_2 = +1$, la somme $S = -1+1 = 0$; et 0 divise 0.

2º) $m = \pm 1 \Longrightarrow \varphi(m) = 1$ et $\pm 1 \mid S$ n'importe quel $S \in \mathbb{Z}$.

3º) $|m| \geq 2$. Notons $S_j = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq K} a_{i_1} \dots a_{i_j}$, $1 \leq j \leq K$

(A) Construisons $f(x) = \prod_{i=1}^{K} (x - a_i) = \sum_{j=0}^{K} (-1)^{K-j} x^{k-j} S_j$,

en prenant $S_0 = 1$.

<u>Propriété 1.</u> Si $(a, m) = 1$, alors $(m-a, m) = 1$.

<u>Propriété 2.</u> Si $m \neq \pm 1$, alors $\varphi(m) \overset{\cdot}{=} M_2$

(leurs démonstrations sont banales .)

Donc $K = 2K_1$; $K_1 \in \mathbb{Z}$, et l'ensemble $\{a_1, \dots, a_{k_1} ; a_{k_1+1}, \dots, a_{2K_1}\} \equiv$

$\equiv \{a_1, \ldots, a_{k_1}, -a_{k_1}, \ldots, -a_1\}$ et

(B) : $f(x) = \prod_{i=1}^{K_1} \left((x-a_i)(x+a_i)\right)$ (mod m).

Si on compare (A) et (B) , on observe que pour s impair, $o < s \leq k$, on a $(-1)^{k-s} \cdot S_s \equiv o \pmod m$, qui est équivalent à $m. | S_s$.

(On a utilisé la propriété 3: Si $a \in C_{i_o}$, alors $-a \in C_{j_o}$, $i_o \neq j_o$. Donc l'ensemble $\{a_1, \ldots, a_{k_1}, -a_{k_1}, \ldots, -a_1\}$ contient exactement un representant de chacune des $2K_1$ classes de restes premières à m , modulo m.

7.86. Soit φ une permutation sur l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$.
Alors $$\frac{1}{n} \cdot \sum_{h=1}^{n} |\varphi(h)-h| \leq \frac{n-1}{2} + \frac{1}{n}\left[\frac{n}{2}\right] .$$

Solution :

Pour la permutation $\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}$ on a :

$$\sum_{h=1}^{n} |\psi(h)-h| . = 2\left[(n-1)+(n-3)+(n-5)+\ldots\right] = 2\cdot \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (n-2k+1 \ldots$$

$$\ldots) = 2\left[\frac{n}{2}\right]\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right) = \frac{n(n-1)}{2} + \left[\frac{n}{2}\right].$$

Démontrons maintenant par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, que la somme $S = \sum_{h=1}^{n} \left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)$ prend la valeur maximum lorsque $\varphi = \psi$.

Pour n=2 et 3 on le vérifie facilement .

On suppose la propriété vraie pour les valeurs $< n+2$. Montrons qu'elle est vraie pour n+2 :

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n+1 & n+2 \\ n+2 & n+1 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Soit $\psi' = \begin{pmatrix} 2 & \ldots & n+1 \\ n+1 & \ldots & 2 \end{pmatrix}$ qui est une permutation de n éléments

et pour lesquels S aura la même valeur que pour la permutation

$\psi'' = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ n & \ldots & 1 \end{pmatrix}$,

c'est-à-dire le maximum (Ψ'' s'est obtenu de Ψ' par la réduction de chaque élément par une unité) conformément à l'hypothèse de récurrence . La permutation de 2 éléments $\eta = \begin{pmatrix} 1 & n+2 \\ n+2 & 1 \end{pmatrix}$ donne la valeur maximum pour S (conformément à l'hypothèse de récurrence). Mais Ψ s'obtient justement à partir de Ψ' et η :

$$\Psi(h) = \begin{cases} \Psi'(h), \text{ si } h \notin \{1, n+2\} ; \\ \eta(h) , \text{ au contraire .} \end{cases}$$

7.87 . Soient p un nombre entier $\geqslant 2$ et $a_i^{(k)} \in \mathbb{R}$, où $i \in \{1,2,\dots,n\}$, $K \in \{1,2,\dots,m\}$. Alors :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} a_i^{(k)}\right)^2\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i^{(k)})^2\right)^{\frac{1}{p}}$$

.

Solution : Tout d'abord on démontre que :

$$(1) \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i^{(1)} + a_i^{(2)})^2\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i^{(1)})^2\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i^{(2)})^2\right)^{\frac{1}{p}} .$$

On peut élever à la puissance p cette inégalité car tous les deux membres sont positifs . On a :

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^{(1)})^2 + \sum_{i=1}^{n} (a_i^{(2)})^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} a_i^{(2)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} (a_i^{(1)})^2 + \sum_{i=1}^{n} (a_i^{(2)})^2 + \sum_{k=1}^{n-1} C_p^k \alpha^{p-k} \beta^k, \text{ où}$$

$$\alpha = \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i^{(1)})^2\right)^{\frac{1}{p}} \text{ et } \beta = \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i^{(2)})^2\right)^{\frac{1}{p}} .$$

A) Si p= 2k , alors $C_p^k \alpha^k \beta^k \geqslant 2\,(\alpha\beta)^k = 2\left(\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i^{(1)})^2\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i^{(2)})^2\right)^{\frac{1}{p}}\right)^k \geqslant 2\left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} a_i^{(2)}\right)^{\frac{2}{p}}\right)^k = 2\left|\sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} a_i^{(2)}\right| \geqslant 2\sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} a_i^{(2)}$ l'avant dernière inégalité résultant conformément à l'inégélité Cauchy-Duniakouski-Schwarts.

B) Soit p= 2k+1.

a) $\alpha \leqslant \beta$. Il en résulte : $C_p^{k+1} \alpha^k \beta^{k+1} = C_p^{k+1} \alpha^k \beta^k \beta^{\frac{1}{2}} \beta^{\frac{1}{2}} \geqslant C_p^{k+1} \beta^{k+\frac{1}{2}} \alpha^{k+\frac{1}{2}} = C_p^{k+1} (\alpha\beta)^{k+\frac{1}{2}} \geqslant 2\cdot\left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} a_i^{(2)}\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{k+\frac{1}{2}} \geqslant$

$$\geqslant 2\cdot\sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} a_i^{(2)}$$

b) $\alpha > \beta$. Il en résulte : $C_p^k \alpha^{k+1} \beta^k = C_p^k \alpha^{k+\frac{1}{2}} > C_p^k \alpha^{k+\frac{1}{2}} \beta^{k+\frac{1}{2}} > 2\,(\alpha\beta)^{k+\frac{1}{2}} \geqslant$

$\geqslant 2\sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} a_i^{(2)}$. Maintenant de (1) , par raisonnement par l'absurde il en résultera le problème .

Le cas m=2 a été vérifié .

Supposons la propriété vraie pour les valeurs $< m$. Montrons pour m :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} a_i^{(k)}\right)^2\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{(1)} + \sum_{k=2}^{m} a_i^{(k)}\right)^2\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i^{(1)})^2 \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=2}^{m} a_i^{(k)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

(conformément à l'hypothèse de récurrence)

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i^{(K)})^2 \right)^{\frac{1}{p}} .$$

7.88. Démontrer l'inégalité :

$$n! > 2^{n-1} . \left[\frac{n-1}{2} \right] ! \left[\frac{n}{2} \right] !$$

Solution :

a) $n = 2k$

$\Rightarrow n! = (2.4.6....2k) . [1.3.5....(2k-1)] =$

$= 2^k . [1.2.3... k)] . [1.3.5... (2k-1)] = 2^k . k! [1.3.5...(2k-1)] >$

$> 2^k . k! . 2^{k-1} . (k-1)! = 2^{2k-1} . (k-1)! . k!$

b) $n = 2k+1$

$n! = 2.4.6....2k . 1.3.5.... (2k-1).(2k+1) =$

$= 2^k . k! . 1.3.5....(2k+1) > 2^k . k! \quad 2.4... 2k =$

$= 2^k . k! . 2k . k! = 2^{2k} k! k!$

De ces deux situations il s'ensuit que :

$$n! > 2^{n-1} . \left[\frac{n-1}{2} \right] ! \left[\frac{n}{2} \right] !$$

7,89. Démontrer l'inégalité :

$$n! > 2^{\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{2^i-1} \left(\left[\frac{n-j}{2^i}\right]-1\right)} \cdot \prod_{h=0}^{2^{m+1}-1} \left[\frac{n-h}{2^{m+1}}\right]!$$

Solution :

(1) $n! > 2^{n-1} \cdot \left[\frac{n}{2}\right]! \left[\frac{n-1}{2}\right]!$ (voir le problème antérieur)

On peut facilement démontrer que

(2) $$\left[\frac{\left[\frac{n-a}{2^p}\right]}{2}\right] = \left[\frac{n-a}{2^{p+1}}\right] \quad , \text{avec } o \leqslant a < 2^p \text{ , } a \in /\!N/ .$$

(3) $$\left[\frac{\left[\frac{n-a}{2^p}\right]-1}{2}\right] = \left[\frac{n-a-2^p}{2^{p+1}}\right] \quad , \text{avec } o \leqslant a < 2^p \text{ , } a \in /\!N/ .$$

(Pour cela on pose $n = 2^{p+1} \cdot K + \alpha$, avec $K \in /\!N/$ et $o \leqslant \alpha < 2^{p+1}$.)
Ensuite on utilise la récurrence pour démontrer l'inégalité de l'énoncé . On considère cette inégalité comme une proposition mathématique qui dépend de m , donc P (m) . On applique la récurrence sur m .

Pour m=o on obtient l'inégalité (1) qui est vraie. On suppose que P (m) est vraie . On va démontrer que P (m+1) est vraie.

Tout d'abord , de (1) ,(2) et(3) il résulte que :

(4) si $o \leqslant h < 2^{m-1}$ alors $\left[\frac{n-h}{2^{m+1}}\right]! > 2^{\left[\frac{n-h}{2^{m+1}}\right]-1} \cdot$

$$\cdot \left[\frac{n-h}{2^{m+2}}\right]! \left[\frac{n-h-2^{m+1}}{2^{m+2}}\right]!$$

Pour chaque h naturel , $o \leqslant h < 2^{n-1}$, on reporte (4) dans P(m) , et puis on effectue tous les calculs .

On trouve justement la proposition P (m+1).

<u>Remarque</u> : Pour généraliser cette inégalité on remplace 2 par un naturel quelconque p , $2 \leq p < n$, et on suit une méthode analogue de résolution . On va trouver un résultat d'écriture plus compliqué , et l'inégalité sera moins fine.

7.90 : Soient $a_{ij} \in [0,1]$, $p_{ij} > 0$ avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$, où $n, m \in \mathbb{N}^*$.

Démontrer que

$$\prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{p_{ij}} + \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{K} a_{ij}^{p_{ij}} - \sum_{j=K+1}^{m} a_{ij}^{p_{ij}} \right) \leq m^n + (2K-m)^n,$$

où K est un nombre naturel $\leq m$.

<u>Solution</u> :

On note $P_1 = \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{p_{ij}} = \prod_{i=1}^{n} \left(a_{i1}^{p_{i1}} + a_{i2}^{p_{i2}} + \ldots + a_{im}^{p_{im}} \right) =$

$$= \left(a_{11}^{p_{11}} + a_{12}^{p_{12}} + \ldots + a_{1m}^{p_{1m}} \right) \ldots \left(a_{n1}^{p_{n1}} + a_{n2}^{p_{n2}} + \ldots + a_{nm}^{p_{nm}} \right).$$

Si on fait toutes les multiplications , on voit que P_1 est une somme algébrique qui contient m^n termes et chacun d'eux a le signe + .

On note $P_2 = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{K} a_{ij}^{p_{ij}} - \sum_{j=K+1}^{m} a_{ij}^{p_{ij}} \right) = \prod_{i=1}^{n} \left(a_{i1}^{p_{i1}} + \ldots + a_{iK}^{p_{iK}} - \right.$

$$\left. - a_{i,K+1}^{p_{i,K+1}} - \ldots - a_{im}^{p_{im}} \right) = \left(a_{11}^{p_{11}} + \ldots + a_{1K}^{p_{1K}} - a_{1,K+1}^{p_{1,K+1}} - \ldots - a_{1m}^{p_{1m}} \right) \ldots$$

$$\ldots \left(a_{n1}^{p_{n1}} + \ldots + a_{nK}^{p_{nK}} - a_{n,K+1}^{p_{n,K+1}} - \ldots - a_{nm}^{p_{nm}} \right).$$

Aussi, lorsqu'on fait toutes les multiplications on obtient une somme algébrique qui contient m^n termes, les uns ont le signe +, les autres -. Les termes de P_2 sont égaux deux à deux aux termes de P_1 en valeur absolue. Notons $P=P_1 + P_2$.

En P se réduirons tous les termes négatifs de P_2, puisqu'ils ont un correspondant positif chacun. (Les termes nuls qui ont le signe - de P_2 seront " réduits " avec les termes nuls qui ont le signe + de P_1 et qui ont la même valeur absolue.

Donc, sans nuire à la généralité, on considère les termes nuls de P_1 et P_2 comme positifs ou négatifs, en fonction du signe + ou - qui se trouve en face d'eux.)

Ainsi, P sera égal à deux fois la somme de tous les termes positifs de P_2. Un terme positif de P_2 est de la forme suivante : $a_{i_1 j_1}^{p_{i_1 j_1}} \cdots a_{i_m j_m}^{p_{m j_m}} \in [0,1]$. Il en résulte que P est inférieur ou égal à deux fois le nombre de termes positifs de P_2 (l'égalité sera vraie lorsque tous $a_{ij} = 1$).

Soit la suite $b_1 = K$, $b_{n+1} = (2K-m)\, b_n + (m-K)\, m^n$.

Par raisonnement par récurrence on montre que b_n calcule justement le nombre de termes positifs de P_2.

Parcequ'on s'intéresse seulement au signe des termes, convenons de désigner par + un terme positif, et par - un terme négatif.

Le cas n=1 implique $P_2^{(1)} = (\underbrace{+ \cdots +}_{K} \quad \underbrace{- \cdots -}_{m-K})$, donc le nombre des termes positifs est K et $b_1 = K$. On suppose la propriété vraie pour n, on va la démontrer pour n+1. Pour n, on a : $P_2^{(n)} = (\underbrace{+ \cdots +}_{b_n} \quad \underbrace{- \cdots -}_{m^n - b_n})$, où b_n représente le nombre des termes positifs de $P_2^{(n)}$. Pour n+1 on a $P_2^{(n+1)} = (\underbrace{+ \cdots +}_{b_n} \quad \underbrace{- \cdots -}_{m^n - b_n}) \cdot (\underbrace{+ \cdots +}_{K} \quad \underbrace{- \cdots -}_{m-K})$.

Le nombre des termes positifs , dans ce cas , sera :

$K\cdot b_n + (m-K) (m^n - b_n) = (K-m+K) b_n + (m-K) b m^n = (2K-m)b_n +$

$+ (m-K) m^n = b_{n+1}$. Mais b_n est une suite linéaire récurrente et homogène .

D'où il résulte que $b_n = \frac{1}{2}(m^n + (2K-m)^n)$, donc $P \leq m^n+(2K-m)^n$.

7.91 . Soit un polynôme P (x) de degré $r < n-1$ qui pour les nombres distincts $x_1 , \dots , x$ prend les valeurs $y_1 , \dots ,y_n$. Pour $1 \leq i \leq n$ on considère les équations

$$x^{n-1} - S_{i,1} x^{n-2} + S_{i,2} x^{n-3} + \dots + (-1)^{n-1} S_{i,n-1} = o$$

qui admettent les racines $x_1, \dots , x_{i-1} , x_{i+1}, \dots ,x_n$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \; S_{i,h} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_j} = o \text{ , avec } o \leq h \leq n-r-2 \text{ ,}$$

où par convention on a noté $S_{i,o} = 1$.

<u>Solution</u> :

Le polynôme qui , pour les nombres distincts $x_1,\dots,x_n$ prend les valeurs , respectivement , $y_1 , \dots, y_n$ est :

$$P (x)= y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)} + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-xn)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)} +$$

$$+\dots+ y_n \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})} ,$$

et c'est celui de plus petit degré ayant cette propriété (d'après Lagrange).

Degré P (x) = $r < n-1$. Cela implique que les coefficients de $x^{n-1}, x^{n-2}, \ldots, x^{r+1}$ sont nuls . Mais les coefficients de x^k, avec $r+1 \leq k \leq n-1$, sont exactement les expressions :

$$(-1)^{n-K-1} \sum_{i=1}^{n} y_i \, S_{i,n-K-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_j} .$$

Lorsque $r+1 \leq K \leq n-1$, on a $o \leq n-K-1 \leq n-r-2$ et on note $h=n-K-1$. $S_{i,h}$ est la somme de tous les produits de h facteurs ($h \neq o$) chacun , qui se forment avec les nombres $x_1 , \ldots , x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ (c'est-à-dire la somme h-ième de relations de Viète , appliquées à l'équation de l'énoncé).

7.92. Soit le polynôme à coefficients entiers $P(x) = \sum_{i=o}^{n} a_i x^i$.

Montrer que pour p, $q \in \mathbb{Z}$, si $P\left(\frac{p}{q}\right) \neq o$, alors $\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq \frac{1}{|q^m|}$, $m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq n$.

Solution :

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = \left| a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_1 p^1 q^{n-1} + a_o q^n \right| \cdot \frac{1}{|q^n|} \geq$$

$$\geq \frac{1}{|q^m|} \cdot \left| a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_1 p^1 q^{n-1} + a_o q^n \right| \geq \frac{1}{|q^m|}$$

parce que :

$m \geq n$ implique que $\frac{1}{|q^n|} \geq \frac{1}{|q^m|}$,

et $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_1 p^1 q^{n-1} + a_o q^n \in \mathbb{Z} \setminus \{o\}$ et sa valeur absolue est ≥ 1 .

7.93 . Montrer que

$$\sum_{s_1+\dots+s_p=k} C_{n_1}^{s_1} C_{n_2}^{s_2} \dots C_{n_p}^{s_p} = C_{n_1+\dots+n_p}^{k}$$

Solution :

On a

$$(1+x)^{n_1}(1+x)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(1+x)^{n_p} = (1+x)^{n_1+\dots+n_p}.$$

Le coefficient de x^k dans le membre droit est $C_{n_1+\dots+n_p}^{k}$.

Le coefficient de x^k dans le membre gauche est

$$\sum_{s_1+\dots+s_p=k} C_{n_1}^{s_1} C_{n_2}^{s_2} \dots C_{n_p}^{s_p} .$$

Des deux observations il résulte l'égalité .

7.94 . Soient $k, m, n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$ et $a_j \in \mathbb{C}$, $j=\overline{1,m}$.
Si $a_j^{2kn} + a_j^{(2k-1)n} + \dots + a_j^{n} + 1 = 0$ pour $j = \overline{1, m}$,

calculer :

$$E(a_1, \dots, a_m) = (a_1 \dots a_m)^{p\cdot n} + \frac{1}{(a_1\dots a_m)^{pn}} +$$

$$+ \sum_{1\leq h\leq m-1} \ \sum_{(i_1,\dots,i_h)\in \mathcal{C}_m^h} \left(\frac{a_{i_1}\dots a_{i_h}}{a_{i_{k+1}}\dots a_{i_m}}\right)^{pn},$$

en sachant que

$$\mathcal{C}_m^h = \{ (i_1 ? \dots , i_h) \in \{1,2,\dots,m\}^h \ / \ i_s \neq i_t \text{ pour } s \neq t \}$$

<u>Solution</u> :

On note $a_j^n = y_j$, $j = \overline{1,m}$. Puisque $y_j \neq 1$, en multipliant cheque égalité de l'énoncé , respectivement , par $y_j - 1$ on obtient :

$$o = (y_j - 1) (y_j^{2k} + y_j^{2k-1} + \dots + y_j + 1) = y_j^{2K+1} - 1 .$$

Donc , quel que soit $j \in \overline{1,m}$ on a $y_j = \cos \frac{P_j \pi}{2k+1} + i \sin \frac{P_j \pi}{2K+1}$,

$P_j = 1 , 2 , \dots , 2 k.$

On va démontrer par récurrence en fonction de $m \in \mathbb{N}^*$, que :

$$E (a_1 , \dots , a_m) = (a_1^{pn} + \frac{1}{a_1^{pn}}) \dots (a_m^{pn} + \frac{1}{a_m^{pn}}).$$

Pour m = 1 on a $E (a_1) = a_1^{pn} + \frac{1}{a_1^{pn}}$. Supposons la propriété vraie pour m , il faut démonteer , pour m+1 , que

$$E (a_1 , \dots , a_m , a_{m+1}) = E (a_1 , \dots , a_m) .(a_{m+1}^{pn} + \frac{1}{a_{m+1}^{pn}}).$$

Donc $E (a_1 , \dots , a_m) = 2^m \cos \frac{P_1 \pi}{2k+1} p \dots \cos \frac{P_m \pi}{2k+1} p$,

$(P_1 , \dots , P_m) \in \{ 1,2, \dots , 2 k\}^m$.

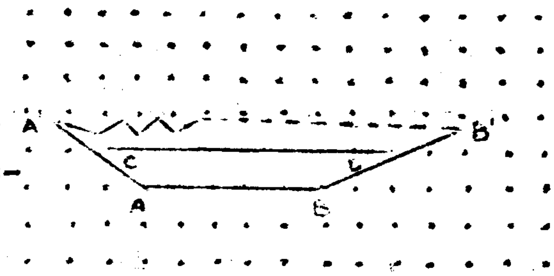
7.95 . Dans un plan on considère l'ensemble des points dont les coordonnées sont des entiers . Soient les naturels n,m,p avec $p \geqslant 4$. Montrer qu'il existe un polygone de p côtés qui ait n points sur sa frontière et m points à l'intérieur.

Généraliser dans l'espace .

Solution :

La démonstration se fait par construction .

On trace le segment [AB] qui contient exactement n points . Sur la ligne située au-dessus de AB , on trace le segment [CD] qui contient exactement m points .



On peut dessiner les segments [AA'] et [BB'] (voir la figure ci-contre) tels qu'ils ne passent par aucun point , et tels que A' , B' se trouvent entre la ligne de CD et la ligne située au-dessus de celle-ci ; et le segment [CD] (c'est-à-dire les m points) se trouve dans l'intérieur du quadrilatère AA'B'B.

$p \geqslant 4 \Longrightarrow p-3 \geqslant 1$. Parceque le polygone a p côtés , on unit les points A' et B' par une ligne polygonale qui contient p-3 côtés et qui est située entre la ligne de CD et la ligne supérieure à celle-ci , sans toucher aucun point .

Généralisation .

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, on considère l'ensemble des points dont les coordonnées sont entières . Si n,m,p sont naturels , $p \geqslant 5$, alors il existe un polyèdre de p faces qui contient n points sur sa frontière et m points à l'intérieur.

La démonstration se fait aussi par construction : on considère les segments [AB] et [CD] avec leurs propriétés antérieures , mais [AA'] et [BB'] sont remplacés par des plans qui gardent les mêmes propriétés . Puis on construit deux plans qui passent par A [illegible] coupés par les plans antérieurs, en gardant bien sûr les conditions demandées.

A la fin , la ligne polygonale A'B' sera remplacée par une chaîne de p-4 plans qui se construisent de façon analogue .

7.96 . Déterminer l'ensemble A défini par :

a) $102 \in A$;

b) si $x \in A$, alors $\overline{1X2} \in A$;

c) les éléments de A s'obtiennent seulement par l'utilisation des règles a) et b) un nombre limité de fois .

Solution :

Montrons que A = M , où $M = \{\overline{\underbrace{1\ldots1}_{n}\,0\,\underbrace{2\ldots2}_{n}} \;/\; n \in \mathbb{N}^*\}$.

Tout d'abord , montrons que $A \supset M$.

On utilise le raisonnement par récurrence pour $n \in \mathbb{N}^*$,pour montrer que $\overline{\underbrace{1\ldots1}_{n}\,0\,\underbrace{2\ldots2}_{n}} \in A$. Pour n=1 on a $102 \in A$ d'après la règle a). On suppose la propriété vraie pour n , alors

$\overline{\underbrace{1\ldots1}_{n}\,0\,\underbrace{2\ldots2}_{n}} \in A$ et il en résulte qu'aussi

$\overline{1\underbrace{1\ldots1}_{n}\,0\,\underbrace{2\ldots2}_{n}2} \in A$ d'après la règle b)

Montrons que $A \subset M$.

Soit $x \in A$. Si on applique seulement la règle a) il en résulte que $x = 102 \in M$. On ne peut appliquer la règle a) qu'une fois . Maintenant la règle b) ne peut s'appliquer que si la règle a) a été appliquée . Si on applique b) une seule fois , on obtient x = 11022 . Par récurrence on démontre que si on applique la règle b) n fois , alors

$x = \overline{\underbrace{1\ldots1}_{n+1}\,0\,\underbrace{2\ldots2}_{n+1}} \in A$. Mais $\underbrace{1\ldots1}_{n+1}\,0\,\underbrace{2\ldots2}_{n+1} \in M$.

Donc $A \subset M$, d'où A = M.

7.97 . On construit l'ensemble B tel que :

a) les éléments 0,9 et 1 appartiennent à B ;

b) si $x, y \in B$, alors $|x-y|$ et $xy \in B$;

c) tout élément de B s'obtient par l'utilisation des règles a) et b) un nombre limité de fois .

Trouver B .

<u>Solution</u> :

Démontrons que B = M , où

$M = \{\overline{o,x_1 \ldots x_p} \mid o \leqslant x_i \leqslant 9,\ i \in \{1,\ldots,p\} ,\ p \in \mathbb{N}^* ,\ p < +\infty\} \cup \{1\}$.

" $\supset$ "

Tout d'abord montrons que $\{o;\ o,1;\ o,2;\ldots o,9;\ 1\} \subset B$

$0,9$ et $0,9 \in B \Rightarrow |0,9-0,9| = 0 \in B$;

$0,9$ et $1 \in B \Rightarrow |0,9-1| = 0,1 \in B$;

$0,9$ et $0,1 \in B \Rightarrow |0,9-0,1| = 0,8 \in B$;

$0,8$ et $0,1 \in B \Rightarrow |0,8-0,1| = 0,7 \in B$;

$0,3$ et $0,1 \in B \Rightarrow |0,3-0,1| = 0,2 \in B$;

Si $y \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ alors $\overline{0,\underbrace{0\ldots0}_{i}y} = \underbrace{0,1\cdots0,1}_{i \text{ fois}}\cdot\overline{0,y} \in B$,

puisque s'obtient par l'utilisation des règles a) et b).

Soit $x \in M$; si x=1 on a $1 \in B$ par la règle a) ; si $x \neq 1$ on a $0 \leqslant x < 1$; si x=o on a $o \in B$. Il reste donc le cas $x = \overline{o,x_1 \ldots x_p}$

avec $o \leqslant x_i \leqslant 9$, $i \in \{1,\ldots,p\}$, $p \in \mathbb{N}^*$, $p < +\infty$ et $x \neq o$; sans nuire la généralité on suppose $x_p \neq o$.

α) si $x_1 \neq 9$, alors $\overline{o,x_1\ldots x_p} = \overline{o,w_1} - \overline{o,oy_2} - \ldots - \overline{o,\underbrace{o\ldots o}_{p-2}\,y_{p-1}} - \overline{o,\underbrace{o\ldots o}_{p-1}\,z_p}$, avec $w_1=x_1+1$, $y_j=9-x_j$, $2 \leq j \leq p-1$, et $z_p=10-x_p$.

Bien sûr $1 \leq w_1 \leq 9$ puisque $o \leq x_1 \leq 8$; on a $o \leq y_j \leq 9$, $2 \leq j \leq p-1$ puisque $o \leq x_j \leq 9$, $2 \leq j \leq p-1$; $1 \leq z_p \leq 9$ puisque $1 \leq x_p \leq 9$.

On a : $\overline{o,w_1} - (\overline{o,oy_2} + \overline{o,ooy_3} + \ldots + \overline{o,\underbrace{o\ldots o}_{p-2}\;y_{p-1}} + \overline{o,\underbrace{o\ldots o}_{p-1}\;z_p}) =$
$= \overline{o,w_1} - \overline{o,oy_2\ldots y_{p-1}z_p}$. Effectuons la soustraction :

$$\begin{array}{r} \overline{o,w_1\;0\ldots 00} - \\ \overline{o,oy_2\ldots y_{p-1}z_p} \\ \hline = \overline{o,x_1x_2\ldots x_{p-1}\;x_p}. \end{array}$$

parce que $10-z_p = x_p$, $w_1-1= x_1$ et $9-y_j = x_j$, $2 \leq j \leq p-1$.

$\overline{o,w_1}$ et $\overline{o,oy_2} \in B \Rightarrow |\overline{o,w_1} - \overline{o,oy_2}| \in B$

$|\overline{o,w_1} - \overline{o,oy_2}|$ et $\overline{o,oy_3} \in B \Rightarrow \big|\,|\overline{o,w_1} - \overline{o,oy_2}| - \overline{o,oy_3}\big| \in B$

mais la dernière valeur absolue est égale à $\overline{o,w_1} - \overline{o,oy_2} - \overline{o,ooy_3}$.

Par récurrence il en résulte que $x \in B$, puisque :

$x = \overline{o,w_1} - \overline{o,oy_2} - \ldots - \overline{o,\underbrace{o\ldots o}_{p-2}\,y_{p-1}} - \overline{o,\underbrace{o\ldots o}_{p-1}\,z_p} =$

$= \underbrace{|\,|\ldots|}_{p-1}\,\overline{o,w_1} - \overline{o,oy_2}| - \overline{o,ooy_3}\,| - \ldots - \overline{o,\underbrace{o\ldots o}_{p-2}\;y_{p-1}}| - \overline{o,\underbrace{o\ldots o}_{p-1}z_p}|$

qui s'obtient par l'utilisation des règles a) et b) un nombre limité de fois.

β) si $x_1 = 9$, on a $o,\underbrace{9...9}_{n} = |1-o,\underbrace{o...o}_{n-1}1| \in B$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$x=\overline{o,9x_2...x_p} = |o,\underbrace{9...9}_{p}-\overline{o,ot_2...t_p}|$,où $t_j = 9-x_j$, $2\leq j\leq p$;
$o\leq t_j\leq 9$ puisque $o\leq x_j\leq 9$ pour $2\leq j\leq p$.

Pour montrer que $t = \overline{o,ot_2...t_p} \in B$, $o\leq t_j\leq 9$, $2\leq j\leq p$,il suffit de voir que le premier chiffre décimal de t est zéro,donc différent de 9 , donc on utilise le cas α).

$t \in B \Rightarrow x \in B$.

„$\subset$"

o,9 et $1\in M\subset[o,1]$; $\{o;o,1;o,2;...;o,9;1\}\subset M$. Les opérations de la règle b) effectuées un nombre limité de fois sur les éléments o,9 et 1 vont donner aussi des éléments de M, parce que:si

$\alpha,\beta\in M$ il en résulte que $\alpha\beta \in M$ et $|\alpha-\beta| \in M$ puisque $o\leq |\alpha-\beta|\leq 1$ et $o\leq\alpha\beta\leq 1$, et α,β ayant un nombre limité de décimales , alors aussi $\alpha\beta$ et $|\alpha-\beta|$ auront un nombre limité de décimales .

7.98. Soit l'ensemble $I = \left\{ \frac{a}{b} \mid a,b\in \mathbb{Z} ,b \neq o , (b,m)= 1 \right\}$

qui s'appelle l'anneau des m-entiers , $m\in \mathbb{Z}$, fixé.

On dit que $x\equiv y$ (mod m) dans I , avec x,y de I ,si et seulement s'il existe $z \in I$ tel que $x-y= m.z$.

On considère l'élement r de I ; trouver sa classe d'équivalence modulo m dans I .

<u>Solution</u> . 1) Le cas $r\in \mathbb{Z}$. a) $m \notin \{-1,o,1\}$

on note $\hat{r}$ la classe cherchée, M_m l'ensemble $m\mathbb{Z}$, et

$M = \left\{ \dfrac{mk_1 + h}{mk_2 + p} ; \middle| k_1 , k_2 , h , p \in \mathbb{Z}, o \leq h , p < |m|, (m,p)=1 \text{ et } h-pr = \dot{M}_m \right\}.$

Montrons que $\hat{r} = M$.

Tout d'abord montrons que $\hat{r} \supseteq M$.

Soit $x \in M$. Alors il existe $k_1, k_2, h, p \in \mathbb{Z}$ avec les propriétés écrites ci-dessus .

1º) $x \in I$, c'est-à-dire x est un m- entier , parceque de $(m,p)=1$ et $k_2 \in \mathbb{Z}$ il résulte que $(mk_2 + p,m) = 1$.

2º) $x \equiv r \pmod m$ dans I , puisqu'il existe $\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2} \in I$,

$\gamma_1 = k_1 - rk_2 + \dfrac{h-rp}{m}$ ($\gamma_1 \in \mathbb{Z}$ parce que $h-rp = \dot{M}_m$) et

$\gamma_2 = mk_2 + p$ (donc $\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$ est un m-entier parce que $(\gamma_2,m)=1$);

tel que :

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} m = \frac{mk_1 + h-mk_2 r-rp}{mk_2 + p} = x-r \text{ . Donc } x \in \hat{r} \text{ .}$$

Montrons que $\hat{r} \subset M$.

Soit $x \in \hat{r}$. Donc $x = \dfrac{a}{b}$ et $b \neq o$, $(b,m)= 1$, ainsi que $x \equiv r \pmod m$ dans I .Mais b peut s'écrire $b=mk_2 + p$, $o \leq p < |m|$, $(p,m)=1$ et de même $a=mk_1+h$, $o \leq h < |m|$, avec k_1 , k_2 , h,p dans $\mathbb{Z}$.

$x \equiv r \pmod m$ dans I , implique que $m \mid x-r$ dans I , donc implique qu'il existe $\gamma = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2} \in I$ tel que $m\gamma = x-r$, et $(\gamma_2,m)=1$.

Considérons γ irréductible . Il en résulte .

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{m(k_1 - k_2 r) + h - pr}{m(mk_2 + p)}$$. Parce que (γ_1 , γ_2)= 1 et

(γ_2, m) = 1 il vient : $m \mid m(k_1 - k_2 r) + h - pr$, d'où $m / h - rp$, c'est à dire $x \in M$.

Remarque 1 . Pour m=o on a $I = \mathbb{Z}$, et pour $m = \pm 1$ on a $I = \mathbb{Q}$.

b) m=o . Chaque classe d'équivalence contient seulement un élément donc $\hat{r} = \{r\}$.

c) $m = \pm 1$. Il existe une seule classe d'équivalence ; donc $\hat{r} = I = \mathbb{Q}$.

2) Le cas $r \in I - \mathbb{Z}$. a) $m \notin \{-1, o, 1\}$.

Propriété 1 .

Soient $m \in \mathbb{Z}$, I l'anneau des m-entiers et $\frac{r_1}{r_2} \in I$.

Alors $\exists\, a \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{r_1}{r_2} \equiv a \pmod m$ dans I .

Démonstration . $\frac{r_1}{r_2} \in I \Rightarrow (r_2, m) = 1$, et $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$.

Soit l'équation diophantienne : $xr_2 + ym = r_1$ (les inconnues étant x et y) qui admet des solutions entières , puisque $(r_2, m) = 1$ et $1 \mid r_1$. Soient $x = x_o \in \mathbb{Z}$ et $y = y_o \in \mathbb{Z}$ une solution particulière . On prend $a = x_o$ et $\gamma_1 = y_o$. On a : $\frac{r_1}{r_2} \equiv$

$\equiv x_o \pmod m$) puisque $m \mid \left(\frac{r_1}{r_2} - x_o \right)$ parce qu'il existe

$$\gamma = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{y_o}{r_2} \in I \text{ tel que } m \cdot \frac{y_o}{r_2} = \frac{r_1}{r_2} - x_o$$. Donc

$x_o \cdot r_2 + y_o m = r_1$

Remarque 2 . Il existe une infinité d'entiers $\propto \in I$ tels que $\frac{r_1}{r_2} \equiv \propto$ (mod m) dans I , avec $m \neq o$.

Ces nombres sont , par exemple , des solutions particulières de l'équation diophantienne antérieure .

Donc , pour $r \in I - \mathbb{Z}$, $\exists\ a \in \mathbb{Z}$, tel que $r \equiv a_r$ (mod m) dans I et $\hat{r} = \hat{a}_r$ qui se détermine comme dans le cas 1 a).

b) Le sous-cas m=o n'existe pas parce qu'il résulterait $I = \mathbb{Z}$ et donc $r \in \mathbb{Z}$.

c) $m = \pm 1$. On a $\hat{r} = I = \mathbb{Q}$.

7.99. On considère l'équation : $a_1 x_1^{m_1} + \dots + a_m x^{m_n} = b$, avec $a_i, m_i \in \mathbb{N}^*$, pour $i \in \{1,\dots,n\}$, et $b \in \mathbb{Z}$. Montrer que l'équation a un nombre limité de solutions naturelles .

Solution :

a) $b > o$. On note tous $x_i^{m_i} = y_i$. L'équation initiale devient $a_1 y_1 + \dots + a_n y_n = b$ (1)

On voit que :

$$o \leq y_1 \leq \left[\frac{b}{a_1}\right] \quad (\text{ sinon on a : } a_1 y_1 > b)$$

$$o \leq y_n \leq \left[\frac{b}{a_n}\right] \quad (\text{ même explication }).$$

Il en résulte que : o $\leq$ le nombre des solutions naturelles de l'équation (1) $\leq \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \left[\frac{b}{a_i}\right]\right) = M =$ nombre fini.

$$x_i = \sqrt[m_i]{y_i} \quad , i \in \{1, \dots, n\}. \qquad (2)$$

Ainsi, si le nombre des solutions de l'équation (1) est limité, alors aussi, de (2) il va résulter qu'il existe un nombre limité de valeurs pour chaque x_i.

β) $b=o$. Alors, la seule solution naturelle est la solution triviale.

γ) $b < o$. L'équation n'admet aucune solution naturelle.

7.100. Soient a_i, $b > o$ pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Alors, l'équation : $a_1^x + \dots + a_n^x = b^x$, $n \geq 2$, admet au plus une solution dans l'ensemble des nombres réels.

Solution :

L'équation peut n'avoir aucune solution, ou bien elle peut avoir au moins une solution.

Si l'équation admet au moins une solution, soit $x_o \in \mathbb{R}$ l'une de celles-ci. Donc $a_1^{x_o} + \dots + a_n^{x_o} = b^{x_o}$.

1) $x_o > o$. Soit $x > x_o$. Il en résulte que $x = x_o + t$ avec $t > o$.

Soit $z = \max\{a_1, \dots, a_n\}$.

$$a_1^x + \dots + a_n^x = a_1^t a_1^{x_o} + \dots + a_n^t a_n^{x_o} \leq Z^t (a_1^{x_o} + \dots + a_n^{x_o}) = $$
$$= Z^t \cdot b^{x_o}.$$

Si $z \geq b \Rightarrow z^{x_o} \geq b^{x_o} \Rightarrow a_1^{x_o} + \dots + a_n^{x_o} > b^{x_o}$. D'où $Z < b$. Ainsi que $a_1^x + \dots + a_n^x < b^x$, $\forall x > x_o$.

Soit $x < x_o$. Il en résulte que $x = x_o - t$ avec $t > o$.

$$a_1^x + \dots + a_n^x = a_1^{-t} a_1^{x_o} + \dots + a_n^{-t} a_n^{x_o} > Z^{-t} (a_1^{x_o} + \dots + a_n^{x_o}) = Z^{-t} b^{x_o}.$$

Puisque $z < b \Rightarrow z^{-t} > b^{-t}$. Ainsi $a_1^x + \dots + a_n^x > b^x, \forall x < x_o$, d'où x_o est la seule solution de l'équation.

2) $x_o < o$. On a :

$$a_1^{x_o} + \dots + a_n^{x_o} = b^{x_o}, \text{ ou } \left(\frac{1}{a_1}\right)^{-x_o} + \dots + \left(\frac{1}{a_n}\right)^{-x_o} = \left(\frac{1}{b}\right)^{-x_o}.$$

avec $-x_o > o$, donc on a réduit ce cas au premier cas.

3) Le cas $x_o = o$ n'est pas possible, puisqu'il en résulterait :

$a_1^o + \dots + a_n^o = b^o$, ou $n=1$, mais par hypothèse $n \geq 2$. Contradiction.

7.101. Montrer qu'une congruence modulo $m; m \neq o$ qui contient des inconnues, admet un nombre limité de solutions distinctes (non congrues deux à deux).

Solution :

Chaque inconnue ne peut prendre que les valeurs : $o, 1, 2, \dots$ $\dots; |m|-1$ c'est-à-dire au maximum $|m|$ valeurs (un système complet de restes modulo $|m|$). Si l'équation - congruence contient n inconnues, alors le nombre maximum de solutions sera $|m|^n < \infty$.

Observation: Lorsque $m = o$, la congruence devient une égalité (une équation) qui peut avoir une infinité de solutions, par exemple $o \cdot x \equiv o \pmod{o}$.

7.102 . Résoudre la congruence linéaire $2x-1 \equiv 1-6y \pmod 4$.

Solution :

La congruence s'écrit : $2x+6y-2 \equiv o \pmod 4$. D'où $2x+6y-2=4K$ avec $K \in \mathbb{Z}$. Ou $x+3y-2K-1 = o$.

(Remarque : on ne peut pas diviser la congruence par 2 au début (on obtiendrait $x+3y \equiv o \pmod 2$).), parce qu'on perd des solutions.)

Le module de la congruence reste 4 . On a :

$x=-3y+2k+1$. Donc $x\equiv -3y+2k+1 \pmod 4$,ou $x\equiv y+2k+1 \pmod 4$.

On prend $(y,k)\in\{0,1,2,3\}^2$, donc toutes les possibilités .

Mais il suffit de donner à K les valeurs o et 1 , puisque : pour $k=3 \Longrightarrow 2k\equiv 2\cdot 1 \pmod 4$ et pour $k=2\Longrightarrow 2k\equiv 2\cdot 0 \pmod 4$.

Si on donne successivement les valeurs (o,o),(1,0),(2.0), (3,0),(0,1),(1,1),(2,1),(3,1) au couple (y,k) on obtient pour x, respectivement les valeurs 1,2,3,0,3,0,1,2. Mais k ne nous interesse pas . Donc :

$\begin{cases} x\equiv 1 \pmod 4 \\ y\equiv 0 \pmod 4\end{cases}$; $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

On sait que le nombre des solutions de cette congruence est égal à $(2,6)\cdot 4 = 8$.

7.103. Soient $a_i\in\mathbb{Q}^*$, $i\in\{1,2,\dots,n\}$, $n\geq 2$ et $b\in\mathbb{Q}$ .Montrer que l'équation $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$ admet une infinité de solutions dans l'ensemble des nombres naturels si et seulement si $(a_1,\dots,a_n)$ divise b et s'il existe $(i_0, j_0)\in\{1,\dots,n\}^2$ tels que $a_{i_0}\cdot a_{j_0} < 0$.

(On note $(a_1,\dots,a_n)$ le plus grand commun diviseur de $a_1,a_2,\dots,a_n$).

Solution :

Si on met les coefficients de l'équation au même dénominateur on peut éliminer les dénominateurs et donc on peut dire que tous les a_i et b sont entiers .

Nécessité .

Puisque l'équation a des solutions dans $\mathbb{N}^n$, alors elle en aura aussi dans $\mathbb{Z}^n$ parce que $\mathbb{N}^n\subset\mathbb{Z}^n$.

Il en résulte que $(a_1,\ldots,a_n)$ divise b , d'après un théorème connu.

On suppose par l'absurde que tous les termes de l'équation ont le même signe , par exemple positif (dans le cas contraire on multiplie l'équation par -1);

-si $b < o$ alors l'équation n'a aucune solution naturelle ; contradiction .

-si $b \geqslant o$, chaque inconnue x_i ne peut prendre des valeurs qu' entre o et $\left[\frac{b}{a_i}\right]$ (des valeurs naturelles), donc un nombre fini de solutions ; contradiction aussi . D'où la supposition est fausse , donc il n'est pas vrai que les termes de l'équation ont le même signe .

Suffisance .

Comme $(a_1,\ldots,a_n)$ divise b il en résulte que l'équation a des solutions dans $\mathbb{Z}^n$. Par hypothèse , l'équation a ℓ termes positifs non nuls , $1 \leqslant \ell < n$, et $k=n-\ell$ termes négatifs non nuls . On a $1 \leqslant k \leqslant n-1 < n$. Alors on écrit :

$$\sum_{h=1}^{\ell} a_h \cdot x_h - \sum_{j=\ell+1}^{n} a'_j x_j = b \text{ , où } o < a'_j = -a_j ,$$

$j \in \{\ell+1,\ldots,n\}$.

(On a supposé les ℓ premiers termes positifs et les k suivants négatifs . Dans les autres cas réordonne les termes et (implicitement) on les renumérote .)

Soit $0 < M = [a_1,\ldots,a_n]$ le plus petit commun multiple de $a_1,\ldots,a_n$. On note $c_i = |M/a_i|$, $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Soit encore $0 < P = [\ell,k]$ le plus petit commun multiple de ℓ et k . On note $\ell_1 = P/\ell$ et $k_1 = P/k$.

Si on pose $\begin{cases} x_h = \ell_1 \cdot c_h \cdot t + x_h^o & , 1 \leqslant H \leqslant \ell \\ x_j = k_1 \cdot c_j \cdot t + x_j^o & , \ell+1 \leqslant j \leqslant n, \end{cases}$

avec $t \in \mathbb{N}'$, $t \geqslant \max_{h,j} \left\{ \left[\frac{-x_h^o}{k_1 c_h} \right] , \left[\frac{-x_j^o}{k_1 c_j} \right] \right\} + 1$,

où $[x]$ représente la partie entière de x, et $(x_1^o ,\ldots,x_n^o)$ est une solution particulière de l'équation (on \'a montré au début de cette démonstration qu'il existe des solutions entières), alors on obtient une infinité de solutions naturelles pour notre équation .

7.104 . Soit l'équation linéaire aux coefficients entiers

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b.$$

a) S'il existe $(i_o,j_o) \in \{ 1,2,\ldots,n\}^2$ tel que $a_{i_o} \equiv \pm 1 (\text{mod } a_{jo})$

alors l'équation admet des solutions dans l'ensemble des nombres entiers .

b) Dans ce cas , la résoudre .

<u>Solution</u> :

a) $a_{i_o} \equiv \pm 1 (\text{mod } a_{j_o}) \Longleftrightarrow \exists\, h_o \in \mathbb{Z} : a_{i_o} - h_o a_{j_o} = \pm 1$.

Soit $d \sim (a_{i_o} , a_{j_o})$. Il en résulte que $d / a_{i_o} - h_o a_{j_o}$, donc $d / \pm 1$, d'où $d \sim 1$.

Comme $(a_{i_o} , a_{j_o}) \sim 1$, on a $(a_1,\ldots,a_n) \sim 1$, mais $1 / b$ .Donc l'équation admet des solutions entières .

b) $$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{\substack{i \neq i_o \\ i \neq j_o}} a_i x_i + (h_o a_{j_o} \pm 1) x_{i_o} + a_{j_o} x_{j_o} =$$

$$= \sum_{\substack{i \neq i_o \\ j \neq j_o}} a_i x_i + a_{j_o} (x_{j_o} + h_o x_{i_o}) \pm x_{i_o} = \sum_{\substack{i \neq i_o \\ i \neq j_o}} a_i x_i +$$

$+ a_{j_o} t \pm x_{i_o} = b$, où $t = x_{j_o} + h_o x_{i_o}$. Il en résulte :

$$\begin{cases} x_{i_o} = \mp \left(\sum\limits_{\substack{i \neq i_o \\ j \neq j_o}} a_i x_i + a_{j_o} t - b \right) \\ x_{j_o} = t - h_o x_{i_o} = \pm \left(h_o \cdot \sum\limits_{\substack{i \neq i_o \\ i \neq j_o}} a_i x_i + (h_o a_{j_o} \pm 1) t - h_o b \right) \\ \text{avec } x_i \in \mathbb{Z},\ i \notin \{ i_o, j_o \} ,\ \text{et } t \in \mathbb{Z} \text{ (paramètres).} \end{cases}$$

7.105 . On donne le système :

$$f_j \left(x_1, \ldots, x_n, [x_1], \ldots, [x_n], \{x_1\}, \ldots, \{x_n\} \right) = b_j \in \mathbb{Q}, j = \overline{1,n} ,$$

où f_j sont des fonctions linéaires qui ont leurs coefficients dans $\mathbb{Q}$; et $[x]$, $\{x\}$ représentent respectivement la partie entière et la partie fractionnaire de x .

Trouver une méthode de résolution pour ce système .

Solution :

(1) En écrivant $x_i = [x_i] + \{x_i\}$ avec $[x_i] \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant \{x_i\} < 1$, $i = \overline{1,n}$, on obtient (après élimination des dénominateurs) le système équivalant :

(2) $g_j \left([x_1], \ldots, [x_n] ; \{x_1\}, \ldots, \{x_n\} \right) = c_j \in \mathbb{Z},\ j = \overline{1,n},$

où les g_j sont maintenant des fonctions linéaires qui ont leurs coefficients dans $\mathbb{Z}$.

On résoudra ce systhème en considérant que $\{x_1\}, \ldots, \{x_n\}$ sont les inconnues . Puisque :

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \, [x_i] + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \cdot \{x_j\} = c_i \quad , i = \overline{1,n},$$

et parce que α_{ij} $[x_j]$, $c_i \in \mathbb{Z}$, $i,j, = \overline{1,n}$, il en résulte:

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \, \{x_j\} \in \mathbb{Z} \quad , \forall i \in \overline{1,n},$$

On applique la méthode de la substitution .On calcule $\{x_{j_1}\}$ d'une équation , $1 \leqslant j_1 \leqslant n$, et l'on remplace dans les autres équations .Ramenons à un système linéaire de n-1 équations à n-1 inconnues .

Procédons de même avec ce nouveau système .(Si l'on obtient en route une équation impossible alors le système (2) n'admet pas de solutions . Stop .) A la fin on obtient :

$\delta \{x_{j_n}\} = h([x_1], \dots, [x_n]) + k \in \mathbb{Z}$.

Donc $\delta \cdot \{x_{j_n}\} \in \mathbb{Z}$. Il en résulte :

$\{x_{j_n}\}$ =o, ou $\{x_{j_n}\} = \dfrac{p}{\delta}$, $p \in \mathbb{N}^*$, mais tel que

$$o \leqslant \frac{p}{\delta} < 1 \; ; \; (\delta, k \in \mathbb{Z}) .$$

Ces deux cas on peut les écrire comme un seul cas :

$\{x_{j_n}\} = \dfrac{p}{\delta}$, $p \in \mathbb{N}$ et $o \leqslant \dfrac{p}{\delta} < 1$.

Soit S_{j_n} le nombre de solutions pour $\{x_{j_n}\}$. Maintenant on fera la route inverse jusqu'à la détermination de tous les $\{x_j\}$, $j = \overline{1,n}$. On remplace la (les) valeur(s) de $\{x_{j_n}\}$ dans le système antérieur de 2 équations à 2 inconnues . On obtient les valeurs de $\{x_{j_{n-1}}\}$.

Soit $S_{j_{n-1}}$ le nombre de celles-ci .

La route inverse continue jusqu'à ce qu'on détermine $\{x_{j_1}\}$, qui a S_{j_1} solutions ; $(\{j_1, \dots, j_n\} = \{1,2,\dots,n\})$;

On remarque que $\{x_i\} \in \mathbb{Q}$, $i=\overline{1,n}$. Si le système a des solutions il en résulte que celles-ci sont dans $\mathbb{Q}$.

Jusqu'à présent on a obtenu $\prod_{i=1}^{n} S_i$ solutions .

(3) En reportant toutes les valeurs de $\{x_1\}, \dots, \{x_n\}$ dans (2) on obtiendra un système linéaire de n équations à n inconnues : $\{x_1\}, \dots, \{x_n\}$ qui sera résolu en nombres entiers . On résoudra normalement dans $\mathbb{R}^n$, et si la solution appartient à $\mathbb{Z}^n$ alors cette solution est juste (on effectue ensuite la relation (1) pour obtenir $x_1, \dots, x_n$) ; sinon, elle ne convient pas .

On va exécuter le paragraphe (3) pour toutes les valeurs de $\{x_1\}, \dots, \{x_n\}$.

Ainsi , le système est bien résolu . Le nombre de solutions de celui-ci est $\geqslant 0$ et $\leqslant \prod_{i=1}^{n} S_i$.

7.106. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $3x-7y+2Z=-18$.

<u>Solution</u> :

La solution générale dans $\mathbb{Z}$ est la suivante :

$x=k_1$, $y=k_1+2k_2$, $Z = 2k_1 + 7k_2 - 9$, avec $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Comme $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $Z \geqslant 0$ il en résulte que $k_1 \geqslant 0$, et aussi que $k_2 \geqslant \left[-\frac{k_1}{2}\right] + 1$ et $k_2 \geqslant \left[\frac{9-2k_1}{7}\right] + 1$, c'est-à-dire on a $k_2 \geqslant \left[\frac{2-2k_1}{7}\right] + 2$. D'où , la solution générale dans $\mathbb{N}$ sera :

$x = k_1$, $y = k_1 + 2k_2$, $Z = 2k_1 + 7k_2 - 9$, avec k_1 et k_2 de $\mathbb{N}$ et $k_2 \geqslant \left[\frac{2-2K_1}{7}\right] + 2$.

7.107. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation :

$$2x + 15y + 9z = 44 .$$

<u>Solution</u> :

On a $o \leqslant y \leqslant \left[\frac{44}{15}\right] = 2$.

A) $y = o \Longrightarrow 2x + 9z = 44 \Longrightarrow o \leqslant z \leqslant \left[\frac{44}{9}\right] = 4$

a) $Z = o \Longrightarrow x = 22$
b) $Z = 1 \Longrightarrow x = \frac{35}{2} \notin \mathbb{N}$
c) $Z = 2 \Longrightarrow x = 13$
d) $Z = 3 \Longrightarrow x \notin \mathbb{N}$
e) $Z = 4 \Longrightarrow x=4$

B) $y = 1 \Longrightarrow 2x + 9z = 29 \Longrightarrow o \leqslant z \leqslant 3$
a) $Z = 1 \Longrightarrow x = 10$
b) $Z = 3 \Longrightarrow x = 1$
c) $Z \in \{o,2\} \Longrightarrow x \notin \mathbb{N}$

C) $y = 2 \Longrightarrow 2x + 9z = 14 \Longrightarrow o \leqslant z \leqslant 1$
a) $z = o \Longrightarrow x = 7$
b) $z = 1 \Longrightarrow x \notin \mathbb{N}$

Toutes les solutions sont :

(22,o,o,) ; (10 , 1,1) ; (7,2,0)

(13,0,2) ; (1, 1, 3) ;

(4, 0, 4)

Donc il y a un nombre limité de solutions .

7.108 . Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation :

$$17 x_1 + 20 x_2 - 18 x_3 = - 34 .$$

<u>Solution</u> :

On écrit l'équation ainsi :

$$20 x_2 - 18 x_3 + 17 (x_1 + 2) = 0$$

On note $x_1 + 2 = t \in \mathbb{Z}$. Il vient :

$20\ x_2 - 18\ x_3 + 17\ t = 0$

C'est-à-dire : $20\ x_2 - 17\ (\ x_3 - t\ ) - x_3 = 0$

On note $x_3 - t = h \in \mathbb{Z}$. D'où :

$20\ x_2 - 17\ h - x_3 = 0$

Donc $x_3 = 20\ x_2 - 17\ h$.

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + 2 = t \\ x_3 - t = h \end{array}\right| \Longrightarrow x_1 = t - 2 = (\ x_3 - h\ ) - 2 =$$

$$= -h - 2 + 20x_2 - 17\ h = 20\ x_2 - 18\ h - 2\ .$$

La solution générale est :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = 20\ k_1 - 18\ k_2 - 2 \\ x_2 = k_1 \\ x_3 = 20\ k_1 - 17\ k_2\ ,\ (\ k_1\ ,\ k_2\ ) \in \mathbb{Z}^2\ . \end{array}\right.$$

7.109 . Résoudre dans l'ensemble des nombres entiers l'équation:

$$15\ x - 17\ y + 9\ Z = \alpha$$

où α est un paramètre entier .

Solution :

L'équation s'écrit :

$$15\ x + 9\ (\ Z - 2y\ ) + y = \alpha$$

ou encore :

(1) $15\ x + 9\ t + y = \alpha$, où $t = Z - 2\ y$ (2)

il suit de (1) que : $y = -15\ x - 9t + \alpha$. (3)

il suit de (2) que : $Z = t + 2y$.

Il résulte de (3) que $Z = -30x - 17\ t + 2\alpha$.

La solution générale entière est :

$$\left\{\begin{array}{l} x = k_1 \\ y = -15\ k_1 - 9\ k_2 + \alpha \\ Z = -30\ k_1 - 17\ k_2 + 2\alpha \end{array}\right. ,\ \text{avec}\ (\ k_1\ ,\ k_2\ ) \in \mathbb{Z}^2,$$

(on a noté $x = k_1$ et $t = k_2$)

7.110 . Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $3x + 70y - 35Z + 6w = 76$.

Solution :

L'équation peut s'écrire :

$$3\underbrace{(x+23y - 12Z + 2w - 25)}_{t_1} + \underbrace{(y+z)}_{t_2} = 1$$

Avec ces notations , on a : $3t_1 + t_2 = 1$, équation qui admet la solution générale :

$$\begin{cases} t_1 = k \\ t_2 = -3k + 1 \text{ , avec } K \in \mathbb{Z} . \end{cases}$$

Donc $y + z = t_2 = -3k+1$, d'où $y = -Z - 3k + 1$, avec $Z \in \mathbb{Z}$. (1)

De manière analogue $x + 23y - 12z + 2w - 25 = t_1 = k$, ou $x - 23z - 69k + 23 - 12z + 2w - 25 = K$ (on a utilisé (1)).

Ainsi, $x = 35z - 2w + 70k + 2$.

La solution générale de l'équation dans $\mathbb{Z}^4$, sera :

$$\begin{cases} x = 35z - 2w + 70k + 2 \\ y = -z \qquad - 3k + \\ \text{avec } z, w, k \in \mathbb{Z} . \end{cases}$$

7.111. Résoudre l'équation $x.y + 5z - 2 = 0$ dans l'ensemble des nombres entiers .

Solution :

$\forall x \in \mathbb{Z}$, on peut écrire : $x = 5k_1 + r_1$, avec $K_1 \in \mathbb{Z}$ et $r_1 \in \{0,1,2,3,4\}$. (1)

$\forall y \in \mathbb{Z}$, on peut aussi écrire : $y = 5K_2 + r_2$, avec $K_2 \in \mathbb{Z}$ et $r_2 \in \{0,1,2,3,4,\}$. (2)

En reportant (1) et (2) dans l'équation initiale , on a $5(5K_1K_2 + K_1r_2 + K_2r_1 + Z) + r_1r_2 - 2 = 0$.

Il en résulte que 5 divise ($r_1 r_2 - 2$). Donc , $(r_1, r_2) \in$
$\in \{(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$. (3)

D'où , la solution générale sera :

$$\begin{cases} x = 5K_1 + r_1 \\ y = 5K_2 + r_2 \\ Z = -5K_1K_2 - K_1r_2 - K_2r_1 + \dfrac{2-r_1r_2}{5} \\ \quad \text{avec } (K_1, K_2) \in \mathbb{Z}^2 \text{ (des paramètres arbitraires),} \\ \text{et } (r_1, r_2) \in \{(1,2), (3,4), (4,3)\} . \end{cases}$$

L'inconnue Z a été obtenue à partir de l'équation initiale puisque on a su les valeurs de x et de y .

7.112 . On donne l'équation $x^2 + 3K_1 + 2 = (3K_2 + 1)^y$. Montrer que l'équation n'admet pas de solution naturelle , quels que soient $(K_1, K_2) \in \mathbb{Z}^2$. Généraliser .

Solution :

On a : $3K_1 + 2 \equiv 2 \pmod 3$ et $3K_2 + 1 \equiv 1 \pmod 3$, donc $(3K_2 + 1)^y \equiv 1 \pmod 3$, ou : $x^2 \equiv 1-2 \equiv 2 \pmod 3$;

a) si $x = \mathcal{M}_3 + 1 \Longrightarrow x^2 \equiv 1 \not\equiv 2 \pmod 3$.
b) si $x = \mathcal{M}_3 + 2 \Longrightarrow x^2 \equiv 1 \not\equiv 2 \pmod 3$.
c) si $x = \mathcal{M}_3 \Longrightarrow x^2 \equiv 0 \not\equiv 2 \pmod 3$.

D'où , $\forall x \in \mathbb{N}$, $x^2 \not\equiv 2 \pmod 3$. Ainsi l'équation n'admet pas de solution naturelle ,

Généralisation :

L'équation $x^2 + 3y + 2 = (3Z+1)^w$ n'admet pas de solution entière .

La démonstration est la même . Tout d'abord on montre que si $K_2 \neq 0$ alors $y \geqslant 0$, parce que si $y < 0$ il en résulterait qu'un nombre entier (le membre gauche de l'équation) est égal à un nombre non entier (le membre droit) .

7.113 . Résoudre l'équation $xy + 4t - 7w + 14 = o$ dans l'ensemble des nombres entiers .

Solution :

On écrit : $xy + 4t - 8w + 12 + w + 2 = o$

On note $t-2w + 3 = v$, qui sera une nouvelle inconnue .

L'équation devient : $xy + 4v + w + 2 = o$, ou

$w= -xy - 4v - 2$. Et $t= v+2w-3 = v + 2 (-xy - 4v-2)-3 =$

$= -2 xy - 7v-7$. Si on change les notations (par souci d'esthétique mathématique) on a la solution générale entière:

$$\begin{cases} x = K_1 \\ y = K_2 \\ t = -2K_1 . K_2 - 7K_3 - 7 \\ w = - K_1 . K_2 - 4 K_3 - 2 \end{cases}, \text{ avec } (K_1, K_2 , K_3) \in \mathbb{Z}^3$$

(paramètres).

7.114 . Montrer que l'équation :

$$2x^2 + 5 xy - 12 y^2 - 2 x + 3y - 1 = o$$

n'a pas de solution dans l'ensemble des nombres entiers .

Solution :

L'équation s'écrit :

$$2 x^2 + 8 xy - 3 xy - 12 y^2 - 2 x + 3 y = 1$$

ou encore $x(2x-3y) + 4y (2x - 3y) - 1 \cdot(2x - 3y) = 1$.

Donc , $(2 x - 3 y) (x + 4 y - 1) = 1$

Comme $x, y \in \mathbb{Z}$ il en résulte qu'on a les possibilités suivantes :

a) soit $\begin{cases} (2 x - 3 y) = 1 & (1) \\ x + 4 y - 1 = 1 & (2) \end{cases}$

(2) $\Longrightarrow$ $x = -4y + 2$, et en reportant dans (1) il vient :

$- 11 y = - 3 \Longrightarrow y = \frac{3}{11} \notin \mathbb{Z}$.

b) soit $\begin{cases} 2x - 3y = -1 & (3) \\ x + 4y - 1 = -1 & (4) \end{cases}$

$(4) \Longrightarrow x = -4y$, et en reportant dans (3) il vient : $-8y - 3y =$
$= -1$

$$\Longrightarrow \quad y = \frac{1}{11} \notin \mathbb{Z} .$$

Donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

7.115 . Démontrer que l'équation :

$$5 x^2 + 50 y^2 - 26 xy + 8 x - 46y + 15 = 0$$

n'admet pas de solution dans l'ensemble des nombres naturels .

Solution I :

L'équation s'écrit :

$(4x^2 + 49 y^2 + 9 - 28 xy + 12x - 42 y) + (x^2 + y^2 + 4 + 2xy-$
$-4 x - 4y) + 2 = 0$

ou $(2x - 7y + 3)^2 + (x+y - 2)^2 + 2 = 0$

Mais cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$, parce-que $(2x - 7y + 3)^2 + (x+y - 2)^2 + 2 > 0$ .Donc elle n'admet pas mon plus de solution dans $\mathbb{N}$.

Solution II :

L'équation s'écrit :

$5 x^2 + 2 (-13y + 4) x + (50 y^2 - 46 y + 15) = 0$

$\Delta = b'^2 - ac = 169 y^2 + 16 - 104y - 250 y^2 + 230 y - 75 =$
$= - \left[(9y - 7)^2 + 10 \right] < 0$

Il en résulte que l'équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.
Donc elle n'admet pas non plus de solution dans $\mathbb{N}$.

7.116 . Résoudre dans l'ensemble des nombres entiers l'équation:

$x^3 - 3y = 2$.

Solution :

L'équation écrit : $x^3 - 2 = 3y$.
Donc $x^3 - 2$ est divisible par 3 , c'est-à-dire $x^3 = \mathcal{M}_3 + 2$.

Soit $x = 3k + r$, $r = 0, 1, 2$, $k \in \mathbb{Z}$

$x = 3k \Longrightarrow x^3 = \mathcal{M}_3 \neq \mathcal{M}_3 + 2$

$x = 3k+1 \Longrightarrow x^3 = \mathcal{M}_3 + 1 \neq \mathcal{M}_3 + 2$.

$x = 3k+2 \Longrightarrow x^3 = \mathcal{M}_3 + 8 = \mathcal{M}_3 + 2$

Donc $x = 3k+2$, $k \in \mathbb{Z}$, d'où :

$$y = \frac{x^3 - 2}{3} = \frac{(3k+2)^3 - 2}{3} = 9k^3 + 18k^2 + 12k + 2.$$

La solution de l'équation est : $\begin{cases} x = 3k+2 \\ y = 9k^3 + 18k^2 + 12k + 2 , \end{cases}$
$k \quad \mathbb{Z}$.

7.117 . Démontrer que l'équation $x^4 - 7y_1 \cdots y_n = 14Z + 10$,

$n \geqslant 1$, n'admet aucune solution entière .

Solution :

On peut écrire : $x^4 - 7(y_1 \cdots y_n - 2z - 1) = 3$, ou encore

$x^4 - 3 = 7(y_1 \cdots y_n - 2z - 1)$.

D'où 7 divise $x^4 - 3$, c'est-à-dire $x^4 = \mathcal{M}_7 + 3$.

Soit $x = \mathcal{M}_7 + r$, avec $r \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$. Alors $x^4 = \mathcal{M}_7 + r^4$;
mais $r^4 \in \{0, 1^4, 2^4, 3^4\}$. Mais on voit que $r^4 \not\equiv 3 \pmod 7$,
donc $x^4 \neq \mathcal{M}_7 + 3$. Il en résulte que l'équation n'admet aucune
solution entière .

7.118 . Résoudre dans l'ensemble des nombres entiers l'équation:

$$5\,x^4 - 6\,y = 20.$$

Solution :

$5\,x^4 - 6y = 20 \iff 6y = 5\,(x^4 - 4)$

Donc y est divisible par 5 .

Soit $y = 5\,z$, $z \in \mathbb{Z}$

L'équation devient :

$5\,x^4 - 30\,z = 20 \iff x^4 - 6\,z = 4 \iff z = \dfrac{x^4 - 4}{6} \in \mathbb{Z}$.

Donc $x^4 \equiv 4 \pmod 6$

Il en résulte :

$x = 6\,k+2$ ou $x = 6\,k+4$, $k \in \mathbb{Z}$

Les solutions entières de l'équation sont :

$$\begin{cases} x = 6\,k+2 \\ y = 5\,\dfrac{(6\,k+2)^4 - 4}{6} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x = 6\,k+4 \\ y = 5\,\dfrac{(6\,k+4)^4 - 4}{6} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

7.119 . Résoudre dans l'ensemble des nombres entiers l'équation :

$$4\,x^y - 7\,z = 5.$$

Solution :

$4\,x^y = 7\,z + 5$; puisque $z \in \mathbb{Z}$ on a $4\,x^y \in \mathbb{Z}$.

Donc $x^y = \alpha \in \mathbb{Z}$ ou $x^y \in \left\{ \pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{1}{4} \right\}$; mais $z = \dfrac{4\,x^y - 5}{7}$,

d'où $x^y = -\dfrac{1}{2}$ ou $x^y = \alpha \in \mathbb{Z}$. Une solution est $x = -2$, $y = -1$, $z = -1$ puisque l'équation $x^y = -\dfrac{1}{2}$ admet la solution en nombre entiers $x = -2$ et $y = -1$.

Si $x^y = \alpha \in \mathbb{Z}$, l'équation initiale devient $4\alpha - 7z - 5 = 0$ qui admet la solution générale entière.

$$\begin{cases} \alpha = 7k+3 \\ z = 4k+1 \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \text{ (paramètre).}$$

Donc $x^y - 7k - 3 = 0$, avec x, y, z de $\mathbb{Z}$. Il en résulte :

$K = \dfrac{x^y - 3}{7}$. Mais $x = \dot{M}_7 + r$, avec $r \in \{0,1,2,\ldots,6\}$.

On écrit $x = 7s+r$, $s \in \mathbb{Z}$, et alors $\dfrac{(7s+r)^y - 3}{7} \in \mathbb{Z}$ si

et seulement si $r = 3$ ou 5

$x = 7s+3 \Longrightarrow y = 6t+1$, $t \in \mathbb{N}$.

$x = 7s+5 \Longrightarrow y = 6t+5$, $t \in \mathbb{N}$.

Donc les solutions entières de l'équation sont :

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 7s+3, \ s \in \mathbb{Z}, \\ y = 6t+1, \ t \in \mathbb{N}, \\ z = \dfrac{4(7s+3)^{6t+1} - 5}{7} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7s+5, \ s \in \mathbb{Z}, \\ y = 6t+5, \ t \in \mathbb{N}, \\ z = \dfrac{4(7s+5)^{6t+5} - 5}{7} \end{cases}$$

7.120 . Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^y + 5z - 2 = 0$

<u>Solution</u> :

De l'équation on tire : $x^y - 2 = \dot{M}_5$

x a la forme : $5k_1 + r_1$; $k_1 \in \mathbb{Z}$ et $r_1 \in \{0,1,2,3,4\}$

Il faut avoir : $x^y \equiv 2 \pmod 5$, ou $(5k_1 + r_1)^y \equiv r_1^y \equiv 2 \pmod 5$.

Ainsi que $r_1 \neq 0$, $r_1 \neq 1$, $r_1 \neq 4$

Pour $r_1 = 2$ on a $2^{\dot{M}_4 + 1} \equiv 2 \pmod 5$ et

Pour $r_1 = 3$ on a $3^{\dot{M}_4 + 3} \equiv 2 \pmod 5$.

$$\text{Donc} \begin{cases} x = 5k_1 + 2 \ ; \quad k_1 \in \mathbb{Z} \\ y = 4k_2 + 1 \ ; \quad K_2 \in \mathbb{N} \\ z = \dfrac{2 - (5k_1 + 2)^{4k_2 + 1}}{5} \end{cases} \qquad (1)$$

$$\text{et}\begin{cases} x = 5\,k_1 + 3 \quad , k_1 \in \mathbb{Z} \\ y = 4\,k_2 + 3 \quad ; k_2 \in \mathbb{N} \\ z = \dfrac{2 - (5\,k_1 + 3)^{4\,k_2 + 3}}{5} \end{cases} \qquad (2)$$

On observe que $z \in \mathbb{Z}$ en (1) et en (2) aussi . Il en résulte que :

$2^{4k_2+1} \equiv 2 \pmod 5$ et $3^{4k_2+3} \equiv 2 \pmod 5$.

La solution générale entière s'obtient en réunissant (1) et (2) .

7.121 . Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $x! = y^z$.

Solution :

$$\begin{cases} x = 0 \Longrightarrow \begin{cases} y=1 \text{ et } z \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{N}^* \text{ et } z=0 \end{cases} \\ x = 1 \Longrightarrow \begin{cases} y=1 \text{ et } z \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{N}^* \text{ et } z= \end{cases} \\ x \geq 2 \Longrightarrow y=x! \text{ et } z=1 \end{cases} \qquad (S)$$

Démontrons la dernière affirmation , parce que les deux premières sont banales . On suppose (par l'absurde) que $z= K \geq 2$. On a $x!=y^K$. On exclut le cas x=2 qui implique y=2 et z=1 . Donc $x \geq 3$. D'où x! contient au moins deux diviseurs premiers (2 et 3) . Donc y^K admet aussi au moins deux diviseurs premiers (2 et 3) , d'où y admet au moins deux diviseurs premiers (2et3).

Soient $x_1, \dots, x_p$ tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à x (on a montré que $p \geq 2$). $x! = x_1^{\alpha_1} \dots x_p^{\alpha_p}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq i \leq p$. Ainsi $x_1^{\alpha_1} \dots x_p^{\alpha_p} = y^z$. D'où il faut que $\alpha_1 \vdots z$, $\alpha_2 \vdots z$, $\dots, \alpha_p \vdots z$.

On considère x_p , le plus grand nombre premier inférieur ou égal à x . Conformément à un théorème de Tchébycheff , entre $\frac{x}{2}$ et x il existe au moins un nombre premier . Donc $\frac{x}{2} < x_p \leq$ $\leq x$. Alors $\alpha_p = \left[\frac{x}{x_p}\right] + \left[\frac{x}{x_p^2}\right] + \ldots = 1$ .Il en résulte que z = 1 . Ainsi (s) représente toutes les solutions de l'équation .

7.122 . Déterminer la forme générale de la solution dans l'ensemble de nombres entiers de l'équation :

$$\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{p_i}}{\sum_{j=1}^{m} x_j^{r_j}}\right| = 1 \text{ , où } m, n, p_i, r_j \in \mathbb{N}^*,$$

$m \leq n$, $r_j < p_j$, $j \in \{1,\ldots,m\}$, où tous les p_i sont des nombres pairs , et tous les r_s sont impairs .

Solution :

On a $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i^{pi}\right| = \left|\sum_{j=1}^{m} x_j^{rj}\right| \leq \sum_{j=1}^{m} \left|x_j^{rj}\right| =$

$$= \sum_{j=1}^{m} |x_j|^{r_j} \text{ et } \left|\sum_{i=1}^{n} x_i^{p_i}\right| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p_i} \geq$$

$$\geq \sum_{j=1}^{m} |x_j|^{r_j}$$

D'où $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p_i} = \sum_{j=1}^{m} |x_j|^{r_j}$, il en résulte :

$$\sum_{j=1}^{m} \left(|x_j|^{p_j} - |x_j|^{r_j} \right) + \sum_{j=m+1}^{n} |x_j|^{p_j} = 0$$

Puisque $|x_j|^{p_j} - |x_j|^{r_j} \geq 0$ et $|x_j|^{p_j} \geq 0$, $\forall j \in \{1,\ldots,n\}$,
on a $x_j = 0$ pour $j \in \{m+1,\ldots,n\}$, et $|x_j|^{p_j} - |x_j|^{r_j} = 0$
pour $j \in \{1,\ldots,m\}$. Donc $x_j \in \{0,1,-1\}$ pour $j \in \{1,\ldots,m\}$.

La forme générale de la solution en nombres entiers de l'équation est :

$$\begin{cases} x_1 = \varepsilon_1, \ldots, x_m = \varepsilon_m, \; x_{m+1} = \ldots = x_n = 0, \text{ avec } \varepsilon_j = 0 \text{ ou } 1, \text{ et } \\ \sum_{1}^{m} \varepsilon_j \neq 0 \; ; \text{ et} \\ x_1 = \xi_1, \ldots, x_m = \xi_m, \; x_{m+1} = \ldots = x_n = 0, \text{ avec } \xi_j = 0 \text{ ou } -1, \text{ et} \\ \sum_{1}^{m} \xi_j \neq 0 . \end{cases}$$

Le nombre des solutions est $2\left(C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^m \right) =$

$= 2\left(2^m - C_m^0\right) = 2^{m+1} - 2$.

<u>7.123</u> . Déterminer l'équation linéaire qui admet la solution dans l'ensemble des nombres entiers suivante :

$$\begin{cases} x_1 = 3K_1 - 7K_2 + 5 \\ x_2 = K_1 + 2K_2 \\ x_3 = 4K_1 + 13K_2 - 71 , \end{cases}$$

où K_1 et K_2 sont des paramètres dans $\mathbb{Z}$.

Solution : L'équation a trois inconnues : x_1, x_2 et x_3.

Sa forme générale est : $a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3 = b$,

avec a'_i, $b'_i \in \mathbb{Q}$, i= 1,2,3 . Ou : $x_1 + \frac{a'_2}{a'_1} x_2 + \frac{a'_3}{a'_1} x_3 = \frac{b'}{a'_1}$.

En notant différemment les coefficients, a-t-on :

$x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b$ avec a_2, a_3, $b \in \mathbb{Q}$.

On peut écrire pour K_1 et K_2 quelconques dans $\mathbb{Z}$:

$3K_1 - 7K_2 + 5 + a_2K_1 + 2 a_2 K_2 + 4a_3K_1 + 13a_3K_2 - 71 a_3 = b$.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Pour } K_1 = K_2 = o \Longrightarrow & 5-71 a_3 = b & (1) \\ \text{Pour } K_1 = o, K_2=1 \Longrightarrow & -7+2a_2+13a_3 = o & (2) \\ \text{Pour } K_1 = 1, K_2=o \Longrightarrow & 3+a_2+4a_3 = o & (3) \end{array}\right\} \quad (4)$$

(On a utilisé (1) pour obtenir (2) et (3).)

Mais (4) est un système de trois équations à trois inconnues que l'on va résoudre normalement .

De (3) il vient $a_2 = -4a_3 - 3$. D'après (2) , il en résulte maintenant $-7+13 a_3 - 8 a_3 - 6 = o$. Ou $a_3 = \frac{13}{5}$, donc $a_2 = -\frac{67}{5}$.

De (1) il vient $b = \frac{25 - 923}{5} = -\frac{898}{5}$.

Donc , l'équation est :

$$5 x_1 - 67 x_2 + 13 x_3 = -898 .$$

7.125 . On considère un naturel $n \geq 3$ et $a \in \mathbb{R}$. Résoudre l'inégalité : $\left[\frac{x+a}{n}\right] + \left[\frac{x-a}{n}\right] \geq [x]$. Discussion.

Solution :

Soit $x = nq + r$, $0 \leq r < n$, $r \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{Z}$.

1) Si $a = nq_a$, $q_a \in \mathbb{Z}$, alors l'inégalité du problème devient :
$2\left[\frac{x}{n}\right] \geq [x]$ (1) , ce qui est équivalent à $(2-n)\, q \geq 0$.

Donc $x \in M_1 = \{ y \mid y = nq + r ,\ 0 \leq r < n ,\ r \in \mathbb{R} ,\ q \leq 0,\ q \in \mathbb{Z} \}$

II) Si $a \neq nq_a$, $q_a \in \mathbb{Z}$, alors a s'écrit :

$a = nq_a + r_a$, $0 < r_a < n$, $r_a \in \mathbb{R}$, $q_a \in \mathbb{Z}$. (2)

On peut supposer $0 < a < n$, puisque , avec (2) , l'inégalité du problème devient équivalente à

$$n q_a + \left[\frac{x + r_a}{n}\right] - n q_a + \left[\frac{x - r_a}{n}\right] \geqslant [x] .$$

On a $\left[\frac{x + a}{n}\right] + \left[\frac{x-a}{n}\right] \geqslant [x]$ (3)

qui est équivalent à $(2-n)q + E(r) \geqslant [r]$ (4)

où $E(r) = \left[\frac{r+a}{n}\right] + \left[\frac{r-a}{n}\right] = \begin{cases} -1, & \text{si } r < \min\{a, n-a\} \\ 0, & \text{si } \min\{a, n-a\} \leq r < \max\{a, n-a\} \\ +1 , & \text{si } r \geqslant \max\{a, n-a\} \end{cases}$

1) $0 \leqslant r < \min\{a, n-a\}$. Alors , (4) $\Longleftrightarrow$ $(2-n)q - 1 \geqslant [r]$.

Ou $q \leqslant -1$. α) $(q = -1) \Rightarrow (4) \Longleftrightarrow (n-3 \geqslant [r])$

$\Longrightarrow x \in M_2 = \{ y / y = -n+r ,\ 0 \leqslant r < \min\{a, n-a\}$ et $[r] \leqslant n-3 \}$

β) $(q = -2) \Longrightarrow (4) \Longleftrightarrow (2n-5 \geqslant [r])$

$\Longrightarrow x \in M_3 = \{ y / y = -2n+r,\ 0 \leq r < \min\{a, n-a\}$ et $[r] \leqslant 2n-5 \}$.

γ)($q \leqslant -3$) $\Longrightarrow$ (4) est vrai .

$\Longrightarrow x \in M_4 = \{ y / y = qn+r ,\ 0 \leqslant r < \min\{a, n-a\},\ q \leqslant -3, q \in \mathbb{Z} \}$.

2) $\min\{a, n-a\} \leqslant r < \max\{a, n-a\}$. Alors (4) $\Longleftrightarrow ((2-n)q \geqslant [r])$.

α)$(q = -1) \Longrightarrow x \in M_5 = \{ y / y = -n+r ,\ \min\{a, n-a\} \leqslant r < \max\{a, n-a\} ,\ [r] \leqslant n-2 \}$.

β) $(q \leqslant -2) \Longrightarrow x \in M_6 = \{ y / y = qn + r ,\ \min\{a, n-a\} \leqslant r < \max\{a, n-a\} ,\ q \leqslant -2 ,\ q \in \mathbb{Z} \}$.

3) $\max\{a, n-a\} \leqslant r < n \Longrightarrow$ (4) $\Longleftrightarrow ((2-n)q+1 \geqslant [r])$

$\Longrightarrow x \in M_7 = \{ y / y = qn + r ,\ \max\{a, n-a\} \leqslant r < n ,\ q \leqslant -1 ,\ q \in \mathbb{Z} \}$

et on a discuté tous les cas .

7.127 .

Trouver une méthode de résolution en nombres naturels pour l'équation :

$$\sum_{i=1}^{m} x_i + a = b \cdot \sqrt[p]{c \cdot \prod_{j=1}^{n} y_j} ,$$

avec a , b, $c \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}^*$.

Solution :

L'équation aura une infinité de solutions naturelles lorsque $b \cdot c \neq 0$.

$\forall h \in \{1,\ldots,n-1\}$ on prend $y_h \in \mathbb{N}$ quelconque . Construisons y_n tel que $c \cdot y_1 \ldots y_n = K^p$ avec $K \in \mathbb{N}$. (1)

Soit y'_n le plus petit nombre naturel qui a la propriété (1). (Il existe un tel y'_n parceque , si on écrit chaque $y_h = \prod_i p_i^{\alpha_{ih}}$, avec $\alpha_{ih} \in \mathbb{N}$ et p_i étant le i-ième nombre premier (positif) $h \in \{1,\ldots,n-1\}$, on prend $y'_n = \prod_i p_i^{\beta_{in}}$, avec $\beta_{in} \in \mathbb{N}$ et les β_{in} sont choisis tels que $\gamma_i + \sum_{h=1}^{n-1} \alpha_{ih} + \beta_{im} = \mathcal{M}_p$,où l'on écrit $c = \prod_i p_i^{\gamma_i}$ avec $\gamma_i \in \mathbb{N}$, et β_{in} (pour chaque i) est le plus petit nombre naturel qui vérifie cette propriété.)

Construisons $y_n = y'_n \cdot t^p$, avec $t \in \mathbb{N}^*$, t étant un paramètre . L'équation devient : $\sum_{i=1}^{m} x_i + a = b \cdot K \cdot t$, où les inconnues sont $x_1, \ldots, x_n$ et t . On a encore :

$$\sum_{i=1}^{m} x_i + a = \alpha t \text{ , on a noté } b \cdot K = \alpha \in \mathbb{N} .$$

A) Si $b \cdot c = o$, alors l'équation $\sum_{i=1}^{m} x_i + a = o$ n'admet pas de solution en nombres naturels .

B) Si $b \cdot c \neq o$, alors $\alpha \neq o$. L'équation admet une infinité de solutions naturelles : $\forall s \in \{1,\ldots,m-1\}$ $x_s = \alpha \cdot w_s + r_s$, où $o \leq r_s \leq \alpha - 1$, $r_s \in \mathbb{N}$, et w_s est un paramètre naturel , et $x_m = \alpha w_m + r_m$, où $o \leq r_m \leq \alpha - 1$ mais r_m est choisi tel que $\sum_{i=1}^{m} r_i + a = \mathcal{M}_\alpha$ (on a noté „$\mathcal{M}_\alpha$" un multiple de α) et aussi $r_m \in \mathbb{N}$, w_m = paramètre naturel .

<u>7.128</u> . On donne l'équation $P(x_1, \ldots, x_n) = o$ avec $P(x_1, \ldots, x_n)$ un polynôme du deuxième degré en $x_1, \ldots, x_n$ à coefficients réels. Montrer que Δ_{x_i} est un carré parfait si et seulement si Δ_{x_j} est un carré parfait . (Par Δ_{x_h} on a noté le déterminant de l'équation initiale de deuxième degré rapportée à l'inconnue x_h .)

<u>Solution</u> :

Nécessité .

(La démonstration réciproque sera analogue .)

L'équation s'écrit : $A_i \cdot x_i^2 + B_i x_i + C_{x_i} = o$, (1)

où A est une constante et B_i une fonction linéaire de premier degré en $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$. (A est une constante , parce que sinon il en résulterait que P a un degré strictement supérieur à 2.)

Δ_{x_i} étant un carré parfait , cela implique que $\Delta_{x_i} = K_i^2(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, avec K_i fonction linéaire du premier degré en $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$.

(1) devient : $A\left(x_i - \frac{-B_i + K_i}{2A}\right)\left(x_i - \frac{-B_i - K_i}{2A}\right) = o$, ou

$$A \, \frac{2A \cdot x_i + B_i - K_i}{2A} \cdot \frac{2A \cdot x_i + B_i + K_i}{2A} = o \quad (2)$$

Puisque $2A \cdot x_i + B_i \mp K_i$ sont des fonctions du premier degré en $x_1, \ldots, x_n$ on peut calculer x_j en fonction de $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$

(2) devient $A \cdot \left(\frac{x_j - f_1(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)}{2A}\right) \cdot$

$$\left(\frac{x_j - f_2(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)}{2A}\right)$$ par notation

<u>par notation</u> $\Delta(x_j - g_1(x_1,\ldots,x_{j-1}, x_{j+1},\ldots,x_n)).(x_j - g_2(x_1,\ldots,x_{j-1}, x_{j+1},\ldots,x_n)) = o$; où g_1, g_2 sont aussi des fonctions linéaires en $x_1,\ldots,x_{j-1}, x_{j+1},\ldots, x_n$. Donc Δ_{x_j} est un carré parfait.

<u>7.129</u>. Soient $a_{\sigma(n)} x^n + \ldots + a_{\sigma(1)} x + a_{\sigma(o)} = o$ toutes les équations obtenues par permutations circulaires des coefficients, sur l'ensemble $\{a_n,\ldots,a_1,a_o\}$, $a_i \in \mathbb{R}^*$, $o \leqslant i \leqslant n$, n pair.

a) Montrer que ces équations admettent une racine commune réelle si et seulement si $a_n + \ldots + a_1 + a_o = o$.

b) Soit x_o la racine commune réelle ; S la somme de toutes les racines des équations, P le produit de toutes les racines des équations. Alors :

$$S - x_o + (n+1)\frac{P}{x_o} = -\left(\sum_{i=o}^{n-2} \frac{a_{n-i}}{a_{n-i-2}} + \frac{a_o}{a_{n-1}} + \frac{a_1}{a_n}\right).$$

<u>Solution</u> :

En tout on a n+1 équations.

a) On a bien sûr $a_{\sigma_k(n)} x_o^n + \ldots + a_{\sigma_K(1)} x_o + a_{\sigma_K(o)} = o$, $o \leqslant K \leqslant n$, (1)

Soit donc x_o la racine commune réelle. On fait la somme de toutes les rélations (1), et il vient : $S_1(x_o^n + x_o^{n-1} + \ldots + x_o^1 + 1) = o$. Il en résulte $S_1 = o$ ou $x_o^n + x_o^{n-1} + \ldots + x_o^1 + 1 = o$, mais il n'existe pas d'$x_o \in \mathbb{R}$ qui annule l'équation $x^n + \ldots + x^1 + 1 = o$, avec n pair. D'où $S_1 = o$; mais $S_1 = a_n + \ldots + a_1 + a_o$.

Réciproquement : $S_1=o$. Cela implique que $a_{\sigma_k(n)} \cdot 1^n + \ldots + a_{\sigma_k(1)} \cdot 1 + a_{\sigma_K(o)} = S_1 = o$, $o \leq K \leq n$. Donc toutes les équations admettent la racine commune réelle $x_o = 1$.

b) $S - x_o = \left(-\frac{a_1}{a_n} - 1\right) + \left(-\frac{a_o}{a_{n-1}} - 1\right) + \left(-\frac{a_n}{a_{n-2}} - 1\right) + \ldots + \left(-\frac{a_2}{a_o} - 1\right)$

$$P = \frac{a_o}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_1}{a_o} = 1 .$$

Donc $S - x_o + (n+1)\frac{P}{x_o} = -\left(\frac{a_o}{a_{n-1}} + \frac{a_1}{a_n} + \sum_{i=o}^{n-2} \frac{a_{n-i}}{a_{n-i-2}}\right)$.

7.130. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(x+1)^x + (x+2)^x = (x+3)^x$ („Amer. Math. Monthly", 1985)

Solution :

Evidemment $x > -1$, puisque les bases des puissances doivent être non négatives , et que pour $x=-1$ l'opération o^{-1} n'a pas de sens .

Si on a $(x+3)^x \neq o$, divisons l'équation par celui-ci. Il en résulte que $\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^x + \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^x = 1$.

Soient $g_1(x) = \left(\frac{x+1}{x+3}\right)^x$ et $g_2(x) = \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^x$ et $f(x) = g_1(x) + g_2(x)$, qui ont le même domaine de définition $]-1, +\infty[$.

Montrons que g_1 et g_2 sont strictement décroissantes , d'où il résulte que f est aussi strictement décroissante .

On construit les représentations graphiques de g_1 et g_2 .

Pour g_1 :

$$\lim_{x\to\infty} g_1(x) = \lim_{x\to\infty} \left[\left(1 + \frac{-2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-2}}\right]^{\frac{-2}{x+3}\cdot x} = e^{-2} = \frac{1}{e^2} < \frac{1}{4}$$

. $x = o \Longrightarrow g_1(o) = 1$;

La droite d'équation $y = \frac{1}{e^2}$ est une asymptote horizontale quand x tend vers $+\infty$.

La droite d'équation $x=-1$ est une asymptote verticale quand x tend vers $+\infty$.

Le graphique de g_1 se trouve sur la figure (1).

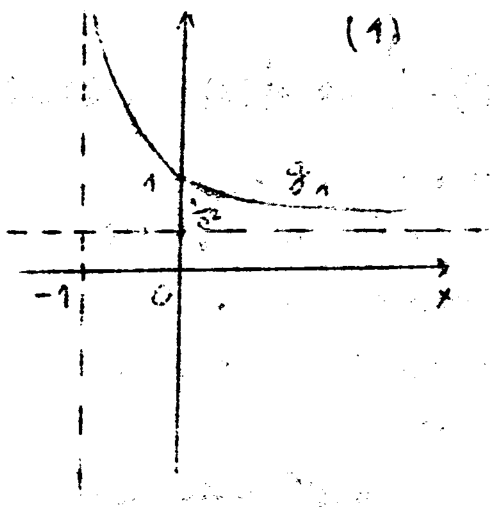
Pour g_2 : $x = o \Longrightarrow g_2(o)=1$; $x=-1 \Longrightarrow g_2(-1)=2$.

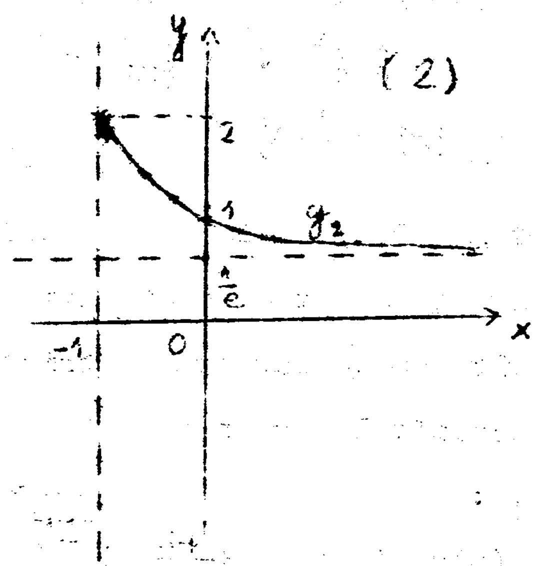
$$\lim_{x \to \infty} g_2(x) = \lim_{x \to \infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-1}} \right]^{\frac{-1}{x+3} \cdot x} = e^{-1} = \frac{1}{e} < \frac{1}{2} .$$

D'où la droite d'équation $y = \frac{1}{e}$ est une asymptote horizontale quand x tend vers $+\infty$.

Le graphique de g_2 se trouve sur la figure (2).

De (1) et (2) on tire que g_1 et g_2 sont strictement décroissantes sur $]-1, +\infty[$, donc on a la même propriété pour f. Parce que $f(2) = 1$ il en résulte que $x=2$ est la seule solution réelle de l'équation .





<u>7.131</u>. Sachant que $b^2 - 4ac$ est un carré parfait , trouver un procédé de résolution dans l'ensemble des nombres entiers de l'équation : $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + fy + e = o$, avec a,b,c,d, f,e, entiers .

<u>Solution</u> : Essayons d'écrire l'équation sous la forme

$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + fy + e = (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2) + \delta$, où $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta \in \mathbb{Q}$, $i \in \{1,2\}$. On a

$\alpha_1 \alpha_2 x^2 + \alpha_1 \beta_2 xy + \alpha_1 \gamma_2 x + \beta_1 \alpha_2 xy + \beta_1 \beta_2 y^2 + \beta_1 \gamma_2 y + \gamma_1 \alpha_2 x + \gamma_1 \beta_2 y + \gamma_1 \gamma_2 + \delta = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + fy + e$.

Par identification il en résulte :

$$(1)\begin{cases} \alpha_1 \alpha_2 = a \\ \beta_1 \beta_2 = c \\ \alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2 = b \end{cases} \quad \text{et} \quad (2)\begin{cases} \gamma_1 \alpha_2 + \alpha_1 \gamma_2 = d \\ \beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1 = f \\ \gamma_1 \gamma_2 + \delta = e \end{cases} ,$$

qui est un système du deuxième degré , de 6 équations à 7 inconnues : $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \delta$. De (1) on tire

$\alpha_2 = \frac{a}{\alpha_1}$, $\beta_2 = \frac{c}{\beta_1}$ et $\alpha_1 \cdot \frac{c}{\beta_1} + \frac{a}{\alpha_1} \cdot \beta_1 = b$. Il en résulte que $cz + \frac{a}{z} = b$, où $z = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \in \mathbb{Q}$. D'où $cz^2 - bz + a = o$;

mais il faut que Δ_z soit un carré parfait , c'est-à-dire que $b^2 - 4ac = K^2$, $K \in \mathbb{Z}$, ce qui est satisfait par hypothèse .

Donc $z = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{b \pm K}{2c}$. Alors $\beta_1 = \alpha_1 \cdot \frac{2c}{b \pm K}$ et $\beta_2 = \frac{b \pm K}{2\alpha_1}$.

On remplace en (2) ; et on obtient :

$$\gamma_1 \cdot \frac{a}{\alpha_1} + \alpha_1 \gamma_2 = d \;;\; \frac{2c}{b \pm K} \alpha_1 \gamma_2 + \frac{b \pm K}{2} \cdot \gamma_1 \cdot \frac{1}{\alpha_1} = f;$$

d'où on trouve $\frac{\gamma_1}{\alpha_1}$ et $\alpha_1 \gamma_2$ comme des rationnels, (3)

puisqu'on a un système linéaire de 2 équations à deux inconnues ($w = \frac{\gamma_1}{\alpha_1}$ et $t = \alpha_1 \gamma_2$) . De (3) , il résulte qu'on peut exprimer γ_1 et γ_2 en fonction de α_1 ; De l'équation $\gamma_1 \gamma_2 + \delta = e$, on fait sortir δ en fonction de α_1 . On donne une valeur convenable à α_1 et on détermine ainsi toutes les inconnues . On a: $(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2) = -\delta$. On met les coefficients au même dénominateur et on élimine celui-ci . Puis on trouve $(\alpha_1' x + \beta_1' y + \gamma_1')(\alpha_2' x + \beta_2' y + \gamma_2') = -\delta'$, avec α_1' , β_1' , γ_1' , α_2' , β_2' , γ_2' , δ' de $\mathbb{Z}$. Maintenant on décompose δ' en facteurs entiers et on essaye toutes les possibilités , ce qui donne un système d'équations diophantiennes :

$$\alpha_i' x + \beta_i' y + \gamma_i' = d_i \text{ avec } d_1 d_2 = -\delta' \text{ et } i \in \{1, 2\}.$$

<u>7.132</u> . On considère l'équation $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$ avec tous les coefficients réels , $a_n \neq 0$, et le naturel $n \geq 2$.

Montrer que si $(n-1) a_{n-1}^2 - 2 \cdot n \cdot a_n a_{n-2} < 0$ alors l'équation n'a pas toutes ses racines dans $\mathbb{R}$.

<u>Solution</u> :

$$S = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + \ldots + (x_1 - x_n)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \ldots + (x_2 - x_n)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_n)^2 =$$

$= (n-1)\left[x_1^2 + \dots + x_n^2\right] - 2\left[x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + \dots + x_2x_n + \dots + x_{n-1}x_n\right] = (n-1)\left[x_1 + \dots + x_2\right]^2 + \left[-2-2\,(n-\frac{1}{2})\right]\left[x_1x_2 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + \dots + x_2x_n + \dots + x_{n-1}x_n\right] = (n-1)\dfrac{a_{n-1}}{a_n^2} + \dfrac{+a_{n-2}}{a_n}(-2n) = \dfrac{1}{a_n^2}\left[(n-1)\,a_{n-1}^2 - 2\,n\,a_n a_{n-2}\right] < 0.$

(On a noté $x_1, x_2, \dots, x_n$ les racines de l'équation .)

Il en résulte que l'équation donnée n'a pas toutes ses racines dans $\mathbb{R}$: puisque sinon il en résulterait que $S \geqslant 0$.

Remarque : pour n=2 on obtient le résultat très connu que si le déterminant d'une équation de deuxième degré , $\Delta < 0$, alors l'équation a des racines complexes .

7.133 . Résoudre le système suivant :

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} x_i = \alpha_j \,, \quad 1 \leqslant j \leqslant n \,, \text{ avec } n \geqslant 2$$

Solution :

On écrit éxplicitement le système :

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} + x_n = \alpha_1 \\ x_1 + x_3 + \dots + x_{n-1} + x_n = \alpha_2 \\ \text{-------------------------------} \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} = \alpha_n \,. \end{cases}$$

On fait la soustraction entre la première équation et chaque autre équation . On a :

$-x_1 + x_k = \alpha_1 - \alpha_k$, $2 \leq K \leq n$.

On reporte $x_K = x_1 + \alpha_1 - \alpha_k$, $2 \leq K \leq n$, dans la première équation et on obtient : $(n-1)x_1 + (n-1)\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$.

D'où $x_1 = \frac{1}{n-1}\left[-(n-2)\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n\right]$.

On détermine de façon analogue les inconnues $x_2, \ldots, x_n$. LA solution du système est : $x_i = \frac{1}{n-1}\left[\alpha_1 + \ldots + \alpha_{i-1} - (n-2)\alpha_i + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_n\right]$, $1 \leq i \leq n$.

7.134. Résoudre dans l'ensemble des nombres entiers le système :

$$\begin{cases} -17x + 52y = 130 \\ 35x - 27y + 26z = 84 . \end{cases}$$

Solution : Résolvons en nombres entiers la première équation du système , qui est une équation diophantienne , sa solution générale sera :

$$(1)\begin{cases} x = 52t - 26 \\ y = 17t - 6 \text{ , avec } t \in \mathbb{Z} . \end{cases}$$

En remplaçant les valeurs de x et y dans la deuxième équation , on a :

(2) $1361t + 26z = 832$, avec $(t, z) \in \mathbb{Z}^2$.

On résout cette équation en nombres entiers ; sa solution générale sera :

$$\begin{cases} t = 26K \\ z = -1361K + 32 \text{ , avec } K \in \mathbb{Z} . \end{cases}$$

Celle-ci est reportée dans (1):

$$\begin{cases} x = 52 \cdot 26K - 26 \\ y = 17 \cdot 26K - 6 \text{ , avec } K \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Donc , la solution générale du système initial est :

$$\begin{cases} x = 1352\,K - 26 \\ y = 442\,K - 6 \\ z = -1361K + 32 \text{ , avec } K \in \mathbb{Z} \text{ .} \end{cases}$$

<u>Observation</u> : La méthode qu'on a utilisée est la substitution normale , qui s'utilise aussi pour résoudre en nombres réels.

<u>7.135</u> . Soit un système linéaire homogène ayant pour matrice associée $A \in \mathcal{M}(m,n;\mathbb{Q})$, qui admet le rang $r(A) < n$. (Le rang d'une matrice c'est l'ordre du déterminant non nul le plus grand extrait de cette matrice .) Montrer que le système admet des solutions entières non triviales .

<u>Solution</u> : On considère le système initial $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$, avec tous les $a_{ij} \in \mathbb{Q}$. On met les coefficients au même dénominateur et on élimine celui-ci . On obtient un système qui a tous les coefficients entiers . On note $r(A) = r < n$ (conformément à l'hypothèse). Si on élimine les équations secondaires alors il reste r équations principales . Résolvons normalement dans $\mathbb{R}^n$, en appliquant la méthode de Cramer . Sans nuire à le généralité on suppose que $x_1, \dots, x_r$ sont les variables principales .

Ainsi $x_{r+1},\ldots,x_n$ seront les variables secondaires . Comme $r < n$, il existe au moins une variable secondaire . Les solutions réelles du système sont :

$$x_h = \frac{1}{\Delta} \sum_{t=r+1}^{n} b_{ht}\, x_t \ , \ 1 \leqslant h \leqslant r \ ,$$ avec tous les b_{ht} et Δ entiers , où Δ est le déterminant qui contient les colonnes $1,\ldots,r$ et les lignes $1,\ldots,r$.

Si on pose $x_t = \Delta \cdot K_t$, $r+1 \leqslant t < n$, avec $K_t \in \mathbb{Z}$ (paramètres) d'où

$$x_h = \sum_{t=r+1}^{n} b_{ht}\, K_t \ , \ 1 \leqslant h \leqslant r \ ,$$

il en résulte une solution entière r - indéterminée pour notre système . Si on donne des valeurs non nulles aux paramètres $K_{r+1}, \ldots, K_n$ on obtient une solution entière non triviale particulière .

7.136. Déterminer les matrices A et B d'ordre n telles que :

$(1 \ x \ x^2 \ \ldots \ x^{n-1}) . A = (1 \ \ 1+x \ \ 1+x^2 \ \ldots \ 1+x^{n-1})$ et

$(1 \ \ 1+x \ \ 1+x^2 \ \ldots \ 1+x^{n-1}) . B = (1 \ x \ x^2 \ \ldots \ x^{n-1})$

quel que soit x réel .

a) Calculer A^m et B^m , pour $m \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrer que $A^k B^e = B^e A^k$ et $(AB)^p = (BA)^p$ $\forall k, e, p \in \mathbb{N}^*$.

c) Montrer que si $\sum_{i=1}^{s} K_i = \sum_{i=1}^{s} e_i$ alors $\prod_{i=1}^{s} A^{k_i} B^{e_i} = I_n$, où I_n est la matrice unitaire d'ordre n ; et $K_i, e_i \in \mathbb{N}^*$.

<u>Solution</u> : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2j} \dots a_{2n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \dots a_{nj} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$

Notons $v = (1 \; x \; x^2 \dots x^{n-1} \dots x^{n-1})$ et $u = (1 \quad 1+x \quad 1+x^2 \dots 1+x^{n-1})$.

En multipliant v par la première colonne de A nous obtenons : $a_{11} + a_{21}x + \dots + a_{n1}x^{n-1} = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. On fait x=o, et il en résulte $a_{11} = 1$, donc $a_{21}x + \dots + a_{n1}x^{n-1} = o$, $\forall x \in \mathbb{R}$; c'est-à-dire que celui-ci est le polynôme nul parcequ'il a plus de n-1 racines) ; d'où $a_{21} = \dots = a_{n1} = o$.

On pultiplie v par la colonne j de A $(2 \leq j \leq n)$ et on obtient: $a_{1j} + a_{2j}x + \dots + a_{j-1,j}x^{j-2} + a_{jj}x^{j-1} + \dots + a_{nj}x^{n-1} = 1 + x^{j-1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Pour x=o on trouve $a_{1j} = 1$. Donc $a_{2j}x + \dots + a_{j-1,j}x^{j-1} + (a_{jj}-1)x^{j-1} + \dots + a_{nj}x^{n-1} = o$, $\forall x \in \mathbb{R}$; Ce polynôme, aussi, est nul, ainsi $a_{2j} = \dots = a_{j-1,j} = a_{j+1,j} = \dots = a_{nj} = o$ et $a_{jj} - 1 = o$, ou $a_{jj} = 1$, avec $2 \leq j \leq n$. Il en résulte que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \dots 1 \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ \vdots & & \ddots \; 0 \\ 0 & \dots & 0 \; 1 \end{pmatrix}$

Soit $B = \begin{pmatrix} b_{11} \dots b_{1j} \dots b_{1n} \\ b_{21} \dots b_{2j} \dots b_{2n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ b_{n1} \dots b_{nj} \dots b_{nn} \end{pmatrix}$. On multiplie u par la première colonne de B, et on trouve : $b_{11} + b_{21} + \dots + b_{n1} + b_{21}x + \dots + b_{n1}x^{n-1} = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Pour $x=o$, cela implique $b_{11} + b_{21} + \dots + b_{n1} = 1$. L'on a aussi $b_{21}x + \dots + b_{n1}x^{n-1} = o$, $\forall x \in \mathbb{R}$. D'où $b_{21} = \dots = b_{n1} = o$.

En multipliant u par la colonne j de B , nous obtenons :

$b_{1j} + b_{2j} + \dots + b_{nj} + b_{2j}x + \dots + b_{jj}x^{j} + \dots + b_{nj}x^{n-1} = x^{j-1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $2 \leqslant j \leqslant n$. Si $x=o$, on trouve $b_{1j} + b_{2j} + \dots + b_{nj} = o$. Donc

$b_{2j}x + \dots + b_{jj}x^{j-1} + \dots + b_{nj}x^{n-1} =$

$= x^{j-1} \Longleftrightarrow b_{2j}x + \dots + b_{j-1,j}x^{j-2} + (b_{jj}-1)x^{j-1} + \dots + b_{nj}x^{n-1} =$

$= o$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

La même chose : $b_{2j} = \dots = b_{j-1,j} = b_{j+1,j} = \dots = b_{nj} = o$ et $b_{jj} - 1 = o$, ou $b_{jj} = 1$. Comme $b_{1j} + b_{2j} + \dots + b_{nj} = b_{1j} + 1 = o \Longrightarrow b_{1j} = -1$; D'où :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ o & 1 & o \dots & o \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & o \\ o & \dots & o & 1 \end{pmatrix}$$

a) On montre par récurrence que $A^m = \begin{pmatrix} 1 & m & \dots & m \\ o & 1 & o \dots & o \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & o \\ o & \dots & o & 1 \end{pmatrix}$

Le cas $m=1$ est évident .

On suppose la propriété vraie pour m, on la montre pour m+1:

$$A^{m+1} = A^m . A = \begin{pmatrix} 1 & m+1 & \dots & m+1 \\ o & 1 & o \dots & o \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & o \\ o & \dots & o & 1 \end{pmatrix}$$

De façon analogue on démontre que $B^m = \begin{pmatrix} 1 & -m & \dots & -m \\ o & 1 & o \dots & o \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & o \\ o & \dots & o & 1 \end{pmatrix}$

b) On voit que $AB = BA = I_n$.

$$A^K B^{\ell} = \underbrace{A\ldots A}_{K}\ \underbrace{B\ldots B}_{\ell} = \underbrace{A\ldots A}_{K-1} BA\ \underbrace{B\ldots B}_{\ell-1} = \ldots = BA^K B^{\ell-1} = \ldots = B^2 A^K B^{\ell-2} =$$

$= \ldots = B^{\ell}A^K$. $AB = BA \Longrightarrow (AB)^P = (BA)^P$.

c) $A^{K_1} B^{\ell_1} A^{K_2} B^{\ell_2} \ldots A^{K_s} B^{\ell_s} = A^{K_1} A^{K_2} B^{\ell_1} B^{\ell_2} \ldots A^{K_s} B^{\ell_s} = A^t B^t =$
$(AB)^t = I_n^t = I_n$, où on a noté $t = \sum_{i=1}^{s} K_i = \sum_{i=1}^{s} \ell_i$.

7.137 . Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a,b \in \mathbb{R}$.

1) Calculer la matrice A^n, où $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Discuter la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{K=1}^{n} \det(A^K)}{\det\left(\sum_{K=1}^{n} A^K\right)}$$

Solution :

I) On démontrera par raisonnement par récurrence que

$A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$, avec $\alpha_n = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2i}\ a^{n-2i}\ b^{2i}$ (1)

et $\beta_n = \sum_{i=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} C_n^{2i-1}\ a^{n-2i+1}\ b^{2i-1}$ (2)

où $[x]$ représente la partie entière de x.

Le cas n=1 c'est évident . Supposons la propriété vraie pour n ,

on démontre qu'elle est vraie aussi pour n+1.

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha_n + b\beta_n & b\alpha_n + a\beta_n \\ b\alpha_n + a\beta_n & a\alpha_n + b\beta_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} \\ \beta_{n+1} & \alpha_{n+1} \end{pmatrix},$$ il faut montrer que $\alpha_{n+1} = a\alpha_n + b\beta_n =$

$$= \sum_{i=o}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2i} a^{n+1-2i} b^{2i} + \sum_{i=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} C_n^{2i-1} a^{n-2i+1} b^{2i} = a^{n+1} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left(C_n^{2i} + C_n^{2i-1} \right) a^{n+1-2i} b^{2i} + \sum_{i=\frac{n+1}{2}} C_n^{2i-1} a^{n+1-2i} b^{2i} ;(3)$$

si $\frac{n+1}{2} \in \mathbb{Z}$

i) Si $n=2K$, alors $\frac{n+1}{2} \notin \mathbb{Z}$, donc la deuxième somme de (3) est égale à zéro, et $\left[\frac{n}{2}\right] = \left[\frac{n+1}{2}\right]$ il en résulte l'expression de α_{n+1} de (1).

ii) Si $n= 2K+1$, alors $\frac{n+1}{2} \in \mathbb{Z}$ et la deuxième somme de (3) est égale à $C_n^n a^o b^{n+1} = b^{n+1}$, d'où résulte l'expression de α_{n+1} de (1) parce que la première somme de (3) aura des termes de $i=o$ jusqu'à $i = \left[\frac{n}{2}\right]$.

Aussi, il faut montrer que $\beta_{n+1} = b\alpha_n + a\beta_n =$

$$= \sum_{i=o}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2i} a^{n-2i} b^{2i+1} + \sum_{i=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} C_n^{2i-1} a^{n-2i+2} b^{2i-1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\left[\frac{n+2}{2}\right]} C_n^{2i-2} a^{n-2i+2} b^{2i-1} + \sum_{i=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} C_n^{2i-1} a^{n-2i+2} b^{2i-1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \left(C_n^{2i-2} + C_n^{2i-1} \right) a^{n+1-2i+1}\, b^{2i-1} + \sum_{i=\frac{n+2}{2}} \Big(C_n^{2i-2} \cdot$$

$$\cdot a^{n-2i+2}\, b^{2i-1} \Big) ; \quad (4) \qquad \text{si } \frac{n+2}{2} \in \mathbb{Z}$$

i) Si $n=2K+1$, alors $\frac{n+2}{2} \notin \mathbb{Z}$ et donc la deuxième somme de (4) est nulle. Aussi $\left[\frac{n+1}{2}\right] = \left[\frac{n+2}{2}\right]$, d'où résulte l'expression de β_{n+1} de (2).

ii) Si $n=2K$, alors $\frac{n+2}{2} \in \mathbb{Z}$, d'où la deuxième somme de (4) est égale à $C_n^{2\left[\frac{n}{2}\right]+2-2} a^{n-2\left[\frac{n}{2}\right]-2+2} b^{2\left[\frac{n}{2}\right]+2-1} = b^{n+1}$.

Ainsi que dans (4), si on fait l'addition entre les deux sommes, il en résulte que pour la première somme i prendre des valeurs de 1 jusqu'à $\frac{n+2}{2} = \left[\frac{n+2}{2}\right]$, d où résulte l'expression de β_{n+1} de (2).

2) $\det (A^K) = \alpha_K^2 - \beta_K^2 \Longrightarrow \sum_{K=1}^{n} \det (A^K) = \sum_{K=1}^{n} (\alpha_K^2 - \beta_K^2) =$

$$= \sum_1^n (\alpha_K - \beta_K)(\alpha_K + \beta_K) = \sum_1^n (a-b)^K (a+b)^K = \sum_1^n (a^2-b^2)^K .$$

(c1) si $a^2 - b^2 \neq 1$, alors $\sum_1^n (a^2 - b^2)^K = (a^2 - b^2) \frac{(a^2-b^2)^n - 1}{a^2-b^2-1}$;

$$\sum_1^n A^K = \begin{pmatrix} \sum_1^n \alpha_K & \sum_1^n \beta_K \\ \sum_1^n \beta_K & \sum_1^n \alpha_K \end{pmatrix} \Longrightarrow \det \left(\sum_1^n A^K \right) =$$

$$= \left(\sum_{1}^{n} \alpha_K\right)^2 - \left(\sum_{1}^{n} \beta_K\right)^2 = \left(\sum_{1}^{n} \alpha_K - \sum_{1}^{n} \beta_K\right)\left(\sum_{1}^{n} \alpha_K + \sum_{1}^{n} \beta_K\right) = \left(\sum_{1}^{n} (\alpha_K - \beta_K)\right) \cdot \left(\sum_{1}^{n} (\alpha_K + \beta_K)\right) = \left(\sum_{1}^{n} (a-b)^K\right) \cdot \left(\sum_{1}^{n} (a+b)^K\right);$$

c2) Si $a-b \neq 1$, alors $\sum_{1}^{n} (a-b)^K = (a-b)\dfrac{(a-b)^n - 1}{a-b-1}$;

c3) si $a+b \neq 1$, alors $\sum_{1}^{n} (a+b)^K = (a+b)\dfrac{(a+b)^n - 1}{a+b-1}$;

- Discussion -

Les cas :

A) Les conditions C1, C2 et C3 sont accomplies.

B) Il existe au moins une condition de celles-ci qui n'est pas accomplie.

A) $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{\sum_{1}^{n} \det (A^K)}{\det \left(\sum_{1}^{n} A^K\right)}\right) = \dfrac{(a-b-1)(a+b-1)}{a^2 - b^2 - 1} \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(a^2-b^2)^n - 1}{(a^2-b^2)^n - (a-b)^n - (a+b)^n + 1}$

$= L$

On a les sous-cas :

A.I. $|a^2 - b^2| < 1$

A.II. $|a^2 - b^2| > 1$

A.III. $|a^2 - b^2| = 1 \implies a^2 - b^2 = -1$ parce que l'on a C1.

A.I. Admet les situations :

A.I.1. $|a-b| < 1$ et $|a+b| < 1 \implies L = -\dfrac{(a-b-1)(a+b-1)}{a^2 - b^2 - 1}$

A.I.2. $|a-b|<1$ et $|a+b|>1 \Longrightarrow L=o$

A.I.3. $|a-b|<1$ et $|a+b|=1 \Longleftrightarrow |a-b|<1$ et $a+b=-1$, parce qu'on a C3. Il en résulte que la limite n'existe pas.

A.I.4. $|a-b|>1$ et $|a+b|<1 \Longrightarrow L=o$

A.I.5. $|a-b|>1$ et $|a+b|>1$ (ce cas n'est pas possible, puisqu'il en résulterait $|a^2-b^2|>1$, qui est en contradiction avec A.I.)

A.I.6. $|a-b|>1$ et $|a+b|=1$ (de même ce cas n'est pas possible).

A.I.7. $|a-b|=1$ et $|a+b|<1 \Longleftrightarrow a-b=-1$ et $|a+b|<1$, parce qu'on a C2. Il en résulte que la limite n'existe pas.

A.I.8. $|a-b|=1$ et $|a+b|=1$
A.I.9. $|a-b|=1$ et $|a+b|>1$

} ces deux cas n'existent pas en raison de A.I.

A.II. admet les situations :

A.II.1. $|a-b|>1$ et $|a+b|>1 \Longrightarrow L=\dfrac{(a-b-1)(a+b-1)}{a^2-b^2-1}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{(a^2-b^2)^n}}{1-\dfrac{1}{(a+b)^n}-\dfrac{1}{(a-b)^n}+\dfrac{1}{(a^2-b^2)^n}}=\frac{(a-b-1)(a+b-1)}{a^2-b^2-1};$$

A.II.2. $|a-b|>1$ et $|a+b|<1 \Longrightarrow L=o$

A.II.3. $|a-b|>1$ et $|a+b|=1 \Longleftrightarrow |a-b|>1$ et $a+b=-1$, parce qu'on a C3. Il en résulte que la limite n'existe pas.

A.II.4. $|a-b|=1$ et $|a+b|>1 \Longleftrightarrow a-b=-1$ et $|a+b|>1$, parce qu'on a C2. Il en résulte que la limite n'existe pas.

A.II.5. $|a-b|=1$ et $|a+b|=1$
A.II.6. $|a-b|=1$ et $|a+b|<1$
A.II.7. $|a-b|<1$ et $|a+b|=1$
A.II.8. $|a-b|<1$ et $|a+b|<1$

} ces quatre cas n'existent pas en raison de A.I.

A.II.9. $|a-b|<1$ et $|a+b|>1$ $\Longrightarrow$ L=o.

A.III. Il en résulte : $L = \dfrac{(a-b-1)(a+b-1)}{a^2-b^2-1} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n-1}{(-1)^n+1-(a-b)^n-(a+b)^n}$

Mais a-b $\neq$o et $a+b = \dfrac{a^2-b^2}{a-b} = -\dfrac{1}{a+b}$, donc

$$L = \frac{(a-b-1)(a+b+1)}{a^2-b^2-1} \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n-1}{(-1)^n+1-(a-b)^n-(-\frac{1}{a-b})^n}$$

$a-b \notin \{-1,1\}$ en raison de C2 et puisque si a-b=-1 il en résulterait $-1= a^2-b^2=(a-b)(a+b)=-(a+b)$, c'est à dire a+b=1 , contradiction avec C3.

A.III. admet les situations :

AIII.1. $|a-b|<1 \Longrightarrow \left|-\dfrac{1}{a-b}\right| > 1 \Longrightarrow$ L=0

A.III.2. $|a-b|>1 \Longrightarrow \left|-\dfrac{1}{a-b}\right|<1 \Longrightarrow$ L=o

A.III.3. $|a-b|=1 \Longleftrightarrow$ a-b=1 ou bien a-b=-1 , qui n'est pas possible .

B) Il existe au moins une condition d'entre C1, C2,ou C3 qui n'est pas accomplie .

- si la condition C1 n'est pas accomplie , alors $a^2-b^2=1$.

$\Longrightarrow \displaystyle\sum_{1}^{n} \det(A^K) = n$.

- si la condition C2 n'est pas accomplie , alors a-b=1 .

$\Longrightarrow \displaystyle\sum_{1}^{n} (a-b)^K = n$.

-si la condition C3 n'est pas accomplie , alors a+b=1 .

$$\Longrightarrow \sum_{1}^{n} (a+b)^K = n \; .$$

Analysons toutes les possibilités de ce cas .

D.I. $a-b = 1$ et $a+b \neq 1$ / Il en résulte $a^2 - b^2 \neq 1$, $a=b+1$ et

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{(a^2-b^2)\left[(a^2-b^2)^n - 1\right]}{a^2 - b^2 - 1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{a+b-1}{(a+b)\left[(a+b)^n - 1\right]} =$$

$$= \frac{(a^2-b^2)(a+b-1)}{(a+b)(a^2-b^2-1)} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{(2b+1)^n - 1}{(2b+1)^n - 1} = 0 .$$

D.II. $a-b=1$ et $a+b=1 \Longrightarrow a^2 - b^2 = 1 \Longrightarrow a=1$ et $b=0 \Longrightarrow L=$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n \cdot n} = 0$$

D.III. $a-b \neq 1$ et $a+b=1 \Longrightarrow a^2 - b^2 \neq 1$, $a=1-b \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow L = \lim_{n \to \infty} \frac{(a^2-b^2)\left[(a^2-b^2)^n - 1\right]}{a^2 - b^2 - 1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{a-b-1}{(a-b)\left[(a-b)^n - 1\right]} =$$

$$= \frac{(a^2-b^2)(a-b-1)}{(a^2-b^2-1)(a-b)} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{(1-2b)^n - 1}{(1-2b)^n - 1} = 0$$

D.IV. $a-b \neq 1$ et $a+b \neq 1 \Longrightarrow a^2 - b^2 = 1$ en raison de D).

$$\Longrightarrow L = \lim_{n \to \infty} \frac{a-b-1}{(a-b)\left[(a-b)^n - 1\right]} \cdot \frac{a+b-1}{(a+b)\left[(a+b)^n - 1\right]} \cdot n =$$

$$= \frac{(a-b-1)(a+b-1)}{a^2 - b^2} \lim_{n \to \infty} \frac{n}{(a^2-b^2)^n - (a-b)^n - (a+b)^n + 1} =$$

$$= (a-b-1)(a+b-1) \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2 - (a-b)^n - (a+b)^n} = 2(1-a) \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2 - (a-b)^n - (a+b)^n}$$

D.IV.1 $|a-b| < 1$ et $|a+b| > 1$. En appliquant le théorème de Stolz - Césaro , on obtient :

$$L = 2(1-a) \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(a+b)^n \left[\frac{2}{(a+b)^n} - \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n - 1 \right]} = o$$

B.IV.2. $|a-b| < 1$ et $|a+b| = 1 \iff |a-b| < 1$ et $a+b = -1$.

Ce cas n'existe pas parce qu'il en résulterait $|a^2 - b^2| < 1$, donc $a^2 - b^2 \neq 1$. Contradiction avec B.IV.

B.IV3. $|a-b| < 1$ et $|a+b| < 1$

B.IV.4 $|a-b| = 1$ et $|a+b| < 1$

B.IV.5 $|a-b| = 1$ et $|a+b| > 1$

B.IV.6 $|a-b| > 1$ et $|a+b| > 1$

B.IV.7. $|a-b| > 1$ et $|a+b| = 1$

} ces cinq cas n'existent pas en raison de B).

B.IV.8. $|a-b| > 1$ et $|a+b| < 1 \Longrightarrow L = o$

B.IV.9. $|a-b| = 1$ et $|a+b| = 1 \iff a-b = -1$ et $a+b = -1 \Longrightarrow a = -1$ et $b = o \Longrightarrow$ la limite n'existe pas .

Et voilà , tous les cas sont étudiés .

La discussion de limte est très longue , mais elle nécessite un bon arrangement des cas (qui dépendent des paramètres réels a et b).

<u>7.138</u> . Soient $a_o, a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels , $a_n > o$, $n \in \mathbb{N}$. On considère le polynôme $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_o$ tel que : s'il existe $a_i < o$; $1 \leq i \leq n-1$, alors le premier coefficient non nul a_{i+K} ; $1 \leq K \leq n-1$; antérieur à a_i , vérifie $|a_i| \leq a_{i+K}$.

Si $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}_+^*$, déterminer le minimum de l'expression :

$$E(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{j=1}^{m} \left(P(x_j) + P\left(\frac{1}{x_j}\right) \right)$$ et le point $(x_1, \ldots, x_n)$

où se réalise ce minimum .

Solution :

Si $x > 0$ et $i > j$, alors $x^i + \frac{1}{x^i} \geqslant x^j + \frac{1}{x^j} \geqslant 2$, les deux égalités ayant lieu lorsque $x=1$.

$$E(x_1,\dots,x_m) = \sum_{j=1}^{m} \left(a_n\left(x_j^n + \frac{1}{x_j^n}\right) + \dots + a_1\left(x_j + \frac{1}{x_j}\right) + 2a_0 \right).$$

Soit $F(x_j) = P(x_j) + P\left(\frac{1}{x_j}\right) = a_n\left(x_j^n + \frac{1}{x_j^n}\right) + \dots + a_1\left(x_j + \frac{1}{x_j}\right) + 2a_0$.

Si $a_i \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, alors $\min\limits_{x_j \in \mathbb{R}_+^*} F(x_j) = 2(a_0 + a_1 + \dots + a_n)$ et celui-ci est réalisé seulement pour $x_j = 1$.

S'il existe $a_i < 0$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, alors de l'hypothèse du problème et pour les autres coefficients on tire $|a_i| \leqslant a_{i+K}$, $1 \leqslant K \leqslant n-i$ on a $a_{i+1} = \dots = a_{i+K-1} = 0$. Donc $a_{i+K}\left(x_j^{i+K} + \frac{1}{x_j^{i+K}}\right) + a_i\left(x_j^i + \frac{1}{x_j^i}\right)$

$$= (a_{i+K} - |a_i|) \cdot \left(x_j^{i+j} + \frac{1}{x_j^{i+K}}\right) + |a_i| \cdot \left(x_j^{i+K} + \frac{1}{x_j^{i+K}} - x_j^i - \frac{1}{x_j^i}\right) \geqslant$$

$$\geqslant (a_{i+K} - |a_i|) \cdot 2 + 0 = 2(a_i + a_{i+K})$$ l'égalité ayant lieu seulement pour $x_j = 1$, et de même il en résulte que $\min\limits_{x_j \in \mathbb{R}_+^*} F(x_j) = 2(a_0 + a_1 + \dots + a_n)$ qui se réalise seulement pour $x_j = 1$.

On trouve que $\min\limits_{\substack{x_j \in \mathbb{R}_+^* \\ j \in \{1,\dots,m\}}} E(x_1,\dots,x_m) = 2m(a_0 + a_1 + \dots + a_n)$, et celui-ci se réalise seulement pour $(x_1,\dots,x_m) = (\underbrace{1,\dots,1}_{m})$

7.139 . Montrer que

a) La somme des puissances d'ordre $2p+1$ de $2K+1$ nombres naturels consécutifs est divisible par $2K+1$.

b) La somme des puissances d'ordre $2p+1$ de $2K$ nombres naturels consécutifs est divisible $2K$ si et seulement si $p \geqslant 1$ et K est divisible par 2 .

Solution .

a) Soit S_1 la somme des puissances d'ordre $2p+1$ de $2K+1$ naturels consécutifs . Les $2K+1$ nombres naturels consécutifs constituent un système complet de restes modulo $2K+1$. D'où $S_1 \equiv 0^{2p+1}+1^{2p+1}+$ $+2^{2p+1}+\dots+K^{2p+1}+(K+1)^{2p+1}+\dots+(2K-1)^{2p+1}+(2K)^{2p+1} \pmod{2K+1}$.

$2K-i \equiv -(i+1) \pmod{2K+1}$, pour $0 \leqslant i \leqslant K-1$.

$\Longrightarrow (2K-i)^{2p+1} \equiv -(i+1)^{2p+1} \pmod{2K+1}$, $0 \leqslant i \leqslant K-1$.

Donc $(2K)^{2p+1} \equiv -1^{2p+1} \pmod{2K+1}$

$(2K-1)^{2p+1} \equiv -2^{2p+1} \pmod{2K+1}$

....

$(K+1)^{2p+1} \equiv -K^{2p+1} \pmod{2K+1}$

$\Longrightarrow S_1 \equiv 0+1^{2p+1}+2^{2p+1}+\dots+K^{2p+1}-K^{2p+1}-\dots-2^{2p+1}-1^{2p+1} \equiv 0 \pmod{2K+1}$

Donc $S_1 \vdots 2K+1$.

b) De même soit S_2 la somme des puissances d'ordre $2p+1$ de $2K$ naturels consécutifs . Les $2K$ nombres naturels consécutifs constituent un système complet de restes modulo $2K$. D'où $S_2 \equiv$ $\equiv 0^{2p+1}+1^{2p+1}+2^{2p+1}+\dots+(K-1)^{2p+1}+K^{2p+1}+(K+1)^{2p+1}+\dots+(2K-2)^{2p+1}+$ $+(2K-1)^{2p+1} \pmod{2K}$.

Mais $2K-i \equiv -i \pmod{2K}$, pour $1 \leqslant i \leqslant K-1$.

$\Longrightarrow (2K-i)^{2p+1} \equiv -i^{2p+1} \pmod{2K},\ 1 \leqslant i \leqslant K-1$.

Donc $(2K-1)^{2p+1} \equiv -1^{2p+1} \pmod{2K}$

$(2K-2)^{2p+1} \equiv -2^{2p+1} \pmod{2K}$

....

$(K+1)^{2p+1} \equiv -(K-1)^{2p+1} \pmod{2K}$

$\Longrightarrow S_2 \equiv 0+1^{2p+1}+2^{2p+1}+\ldots+(K-1)^{2p+1}+K^{2p+1}-(K-1)^{2p+1}-\ldots-$
$-2^{2p+1}-1^{2p+1} \equiv K^{2p+1} \pmod{2K}$. Donc $(S_2 \vdots 2K) \Longleftrightarrow (K^{2p+1} \vdots 2K) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (K^{2p} \vdots 2) \Longleftrightarrow (p \geqslant 1$ et $K \vdots 2)$.

7.140. Montrer que si a et m sont des entiers , $m \neq 0$, alors $(a^{|m|}-a)(|m|-1)!$ est divisible par m .

Solution :

I) m est premier .

a) $a = \mathcal{M}_m$. Alors $a^{|m|}-a = \mathcal{M}_m$, et on en tire la cohclusion .

b) $a \neq \mathcal{M}_m$. On a , d'après le théorème de Fermat, $a^{|m|}-a = \mathcal{M}_m$.

II) m n'est pas premier , $m \neq 0$.

a) $|m| = 4$. Alors

$E = (a^{|m|}-a)(|m|-1)! \equiv 2a(a^{|m|-1}-1) \equiv 2a\,(a^3-1) \pmod 4$.

Si $a = \mathcal{M}_2$, il en résulte $E \equiv 0 \pmod 4$

Si $a = \mathcal{M}_2 + 1$, il en résulte $a^3-1 = \mathcal{M}_2$, d'où $E \equiv 0 \pmod 4$.

b) $|m| \neq 4$. Donc, $\exists a,b \in \mathbb{Z} - \{0,-1,+1\}$: $|m| = |a|.|b|$.

Si $|a| \neq |b|$, puisque $|a| < |m|-1$, $|b| < |m|-1$, il est clair que $|a|$ et $|b|$ se trouvent parmi les facteurs de $(|m|-1)!$, donc $(|m|-1)! \equiv 0 \pmod m$, d'où la conclusion .

Si $|a| = |b|$, puisque $|m| \neq 4$ et $|a| < |m|-1$, $|b| < |m|-1$, on a $2|b| < |m|-1$, ainsi $|a|$ et $2|b|$ se trouvent parmi les facteurs

de $(|m|-1)!$, donc $(|m|-1)! \equiv 0 \pmod{m}$, donc $E \equiv 0 \pmod{m}$.

<u>Remarque</u> : En II on a démontré l'assertion suivante :

si $m \in \mathbb{Z} - \{0, \pm 2\}$, alors $(|m|-1)! \equiv 0 \pmod{m}$.

./.

-o- BIBLIOGRAPHIE -o-

(1) Gazeta Matematica , Revue de la Société de Mathématique de Roumanie .

(2) Revista Matematica a Elevilor din Timisoara .

(3) Stüntà si Tehnica , Bucarest .

(4) Licariri , Craïova .

(5) Matématikai Lapok , Cluj-Napoca .

(6) Les Annales de l'Université de Timisoara .

(7) Buletinul stüntific si tehnic al Institutului Politehnic " TRAIAN VUIA " , Timisoara .

(8) Les Annales de l'Université de Craïova .

(9) W. Sierpinski- " 250 problèmes de théorie élémentaire des nombres " , Classiques Hachette , Paris , 1972.

(10) D. Gerll , G. Girard - " Les olympiades internationales de mathématique ", Classiques Hachette , Paris , 1976.